

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

AMORTISSEMENT D'UNE POUTRE PAR TRAITEMENT
VISCOÉLASTIQUE CONTRAINT ET ANALYSE DU RÉGIME
TRANSITOIRE SUITE À UN IMPACT

DANIEL GRANGER
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
DÉCEMBRE 2007



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-36915-9

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-36915-9

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

AMORTISSEMENT D'UNE POUTRE PAR TRAITEMENT
VISCOÉLASTIQUE CONTRAINT ET ANALYSE DU RÉGIME
TRANSITOIRE SUITE À UN IMPACT

présenté par: GRANGER Daniel

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. MARCHAND Luc, Ph.D., président

Mme ROSS Annie, Ph.D., membre et directrice de recherche

M. HÉBERT Alain, Ph.D., membre

À Catherine,
sans qui ce projet n'aurait jamais
débuté et ne se serait jamais terminé.

REMERCIEMENTS

Je tiens sincèrement à remercier ma directrice de recherche Mme Annie Ross. Tout au long de ce projet, elle a su m'épauler et me diriger avec brio. Grâce à elle, cette maîtrise aura certes revêtu un riche volet scientifique, mais aussi un important apprentissage de rigueur et un souci fort développé d'exactitude.

Je veux de plus saluer mes collègues qui ont contribué à faire de mon passage à la section Mécanique appliquée un moment très agréable et dynamique. Un merci particulier à Jean-François Blais pour ses judicieux conseils. Merci aussi à Christian Dupuis avec qui j'ai partagé de *grandes* discussions pédagogiques et philosophiques : « *Pourquoi les étudiants supposent-ils les câbles en compression ? Que voient-ils que nous ne saisissons ?* » Merci à tous les autres avec qui l'apéro de début de soirée (et parfois de fin d'après-midi) a toujours été aussi désaltérant !

RÉSUMÉ

Les effets d'un traitement viscoélastique partiel et contraint sur la réponse initiale transitoire d'une poutre encastrée-libre soumise à un impact sont étudiés à l'aide d'un modèle analytique. Les propriétés du matériau viscoélastique sont dépendantes en fréquence et le module de cisaillement complexe est modélisé par une série de Prony. Les équations du mouvement (EDM) du système sont obtenues en utilisant les équations de Lagrange. Les forces d'impact utilisées sont caractérisées par une montée rapide jusqu'à une valeur maximale d'environ 10 Newtons et une décroissance plus lente. Le contact dure environ 2 millisecondes. Les EDM sont converties dans le domaine fréquentiel en utilisant une transformée de Fourier et elles sont résolues pour trouver les déplacements en fréquence en utilisant la méthode *assumed modes*. Les déplacements sont reconvertis dans le domaine temporel en utilisant la transformée de Fourier inverse. Les fréquences naturelles et les réponses transitoires sont validées en utilisant des signaux de force expérimentaux. Les résultats numériques obtenus sont en accord avec la littérature et les données expérimentales. Ces dernières sont obtenues en excitant près de l'encastrement différentes configurations de poutres et de tampons à l'aide d'un marteau d'impact. Les déplacements sont mesurés à différents endroits. Quatre paramètres sont étudiés : la longueur du traitement, la position du traitement, l'épaisseur de la couche viscoélastique et l'épaisseur de la couche de contrainte. On en conclut que : (1) plus le tampon est long, plus les déplacements transitoires initiaux sont faibles ; (2) plus l'épaisseur de la couche de contrainte augmente, plus les déplacements sont faibles et (3) moins l'effet de la couche de viscoélastique est important ; (4) l'augmentation de l'épaisseur de la couche de viscoélastique diminue les amplitudes de déplacement

lorsque le tampon est long ; (5) la combinaison d'un tampon court et d'une position éloignée de l'encastrement peut conduire à des problèmes de causalité. Il est montré que l'ajout de masse n'affecte pas les comportements mentionnés ci-haut.

ABSTRACT

The effects of a viscoelastic partial constrained layer damping (PCLD) treatment on the initial transient response of an impacted beam are studied using an analytical model. The viscoelastic properties of the core are frequency dependent and the shear modulus is modelled using a Prony Series. The equations of motion (EOM) of the system are obtained using Lagrange's equations. The forces used are characterized by a quick increase up to a maximum value of approximately 10 Newtons and a slower decrease until the force disappears. The EOM are converted in the frequency domain using Fourier Transform and they are solved for frequency displacements using the assumed modes method. Displacements are then converted back in the time domain using an inverse Fourier Transform. The technique is validated for natural frequencies and for transient responses using experimental impact signals. The numerical results are in good agreement both with open literature and experimental data. These data are obtained by exciting different beams with various PCLD configuration using an impact hammer. The displacements are measured over different positions. Four PCLD parameters are studied : the length, the placement, the viscoelastic layer thickness and the constraining layer thickness. It turns out that (1) the longer is the PCLD, the smaller are the initial transient displacements; (2) a thicker constraining layer leads to smaller transverse displacements; (3) the viscoelastic layer thickness has little effect on the displacements when the constraining layer is thick; (4) a thick viscoelastic layer leads to smaller displacements if the PCLD is long; (5) combining a short PCLD and a placement far from the clamped edge may result in non causal displacements. It is shown that the added mass does not change the above-mentioned behaviors.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xii
LISTE DES FIGURES	xv
LISTE DES ANNEXES	xviii
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xx
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE CRITIQUE DE LA LITTÉRATURE	4
1.1 Les poutres	4
1.1.1 Géométrie	5
1.1.2 Méthodes analytiques	7
1.2 Modèle viscoélastique	8
1.2.1 Le module complexe	8
1.2.2 Cohérence temps-fréquence	9
1.2.2.1 Le modèle GHM	9

1.2.2.2	Séries de Prony	11
1.2.3	Obtention des propriétés viscoélastiques	12
1.3	Les poutres sandwich	13
1.4	Les traitements partiels contraints	20
1.5	Régime transitoire	27
CHAPITRE 2	DÉMARCHE DE L'ENSEMBLE DU PROJET	30
CHAPITRE 3	ARTICLE : EFFECTS OF PCLD PARAMETERS ON THE INITIAL TRANSIENT RESPONSE OF IMPACTED CAN- TILEVER BEAMS : EXPERIMENTAL AND NUMERI- CAL RESULTS	34
3.1	Abstract	34
3.2	Introduction	35
3.3	Model	39
3.3.1	Geometry and displacements	39
3.3.2	Energies	42
3.3.3	Discretization	44
3.3.4	Equations of motion	45
3.3.5	Solving for transient response	47
3.3.6	Numerical computations	49
3.3.7	Viscoelastic properties	50
3.4	Model validation	51
3.4.1	Literature validation	51
3.4.2	Experimental setup	54
3.4.3	Transient response validation	57

3.5	Numerical results	63
3.5.1	Geometric and physical parameters of the system	63
3.5.2	Impact load and numerical parameters	63
3.5.3	Results and discussion	66
3.5.4	Causality	73
3.6	Conclusion	74
3.7	Appendix A – Admissible functions	77
3.8	Appendix B – Submatrices terms involved in energy expressions . .	78
CHAPITRE 4 RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET ANALYSES COMPLÉ-		
	MENTAIRES	79
4.1	Paramètres du système et force d'impact	79
4.2	Erreur de causalité	80
4.3	Influence de la longueur du tampon amortissant (L_c)	88
4.4	Influence des épaisseurs des couches de viscoélastique (h_v) et de contrainte (h_c) du tampon amortissant	93
CHAPITRE 5 DISCUSSION GÉNÉRALE		103
CONCLUSION		108
RÉFÉRENCES		111
ANNEXES		120

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Constant properties of the different layers for the experimental setup of Kung and Singh (Kung and Singh, 1998)	52
Tableau 3.2	Properties of patches A and B used in the experimental setup of Kung and Singh (Kung and Singh, 1998)	52
Tableau 3.3	Comparison of the natural frequencies (rad/s) obtained experimentally and analytically by Kung and Singh (Kung and Singh, 1998), and numerically using the presented model. Numbers in parenthesis are the relative errors as compared to experimental data.	53
Tableau 3.4	Beam specimens. All dimensions in mm.	55
Tableau 3.5	Physical properties of materials.	55
Tableau 3.6	Prony Series parameters of the viscoelastic layer	55
Tableau 3.7	Natural Frequencies in Hz for Different Beam Specimens Using Experimental Setup (Exp) and the Present Model (Model)	56
Tableau 3.8	Effect of different PCLD lengths over the amplitudes of displacement.	68
Tableau 3.9	RMS values associated with Fig. 3.12	69
Tableau 3.10	RMS values associated with Fig. 3.13	70
Tableau 3.11	RMS values associated with Fig. 3.14	72
Tableau 4.1	Erreurs de causalité (C , %) en fonction de la position et de l'épaisseur de la couche de contrainte d'un tampon amortissant ($L_c = L/5$, $h_c = h_b/4$)	82

Tableau 4.2	Erreurs de causalité (C , %) en fonction de la position et de l'épaisseur de la couche de contrainte d'un tampon amortissant ($L_c = 2L/5$)	83
Tableau 4.3	Erreurs de causalité (C , %) en fonction de la position et de l'épaisseur de la couche de contrainte d'un tampon amortissant ($L_c = 3L/5$)	84
Tableau 4.4	Erreurs de causalité (C , %) en fonction de la position et de l'épaisseur de la couche de contrainte d'un tampon amortissant sans masse ($L_c = L/5$)	86
Tableau 4.5	Erreurs de causalité (C , %) en fonction de la position et de l'épaisseur de la couche de contrainte d'un tampon amortissant sans masse ($L_c = 2L/5$)	87
Tableau 4.6	Erreurs de causalité (C , %) en fonction de la position et de l'épaisseur de la couche de contrainte d'un tampon amortissant sans masse ($L_c = 3L/5$)	87
Tableau 4.7	Valeurs RMS du déplacement en fonction de la longueur du traitement amortissant L_c pour deux épaisseurs de couche viscoélastique	90
Tableau 4.8	Valeurs RMS du déplacement en fonction de la longueur du traitement amortissant L_c pour deux épaisseurs de couche viscoélastique et pour un tampon sans masse	92
Tableau 4.9	Valeurs RMS calculées sur 25 ms et variation maximale pour différentes valeurs d'épaisseurs h_v et h_c	96
Tableau 4.10	Valeurs RMS pour différentes valeurs d'épaisseurs h_v et h_c d'un tampon sans masse	101

Tableau 4.11	Différences relatives (%) entre les valeurs RMS pour les tam-	
	pons avec et sans masse	102

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Raccourcissement de la projection de l'axe neutre	5
Figure 1.2	Analogie mécanique du modèle GHM	10
Figure 1.3	Élément de poutre sandwich : bilan de forces et de moments	15
Figure 1.4	Conditions aux limites du modèle de Mead et Markus modifiées par Huang et al.	17
Figure 1.5	Poutre étudiée par Lall et al.	21
Figure 3.1	Partial constrained viscoelastic layer damping applied to a base beam	40
Figure 3.2	Deformed element with displacements	40
Figure 3.3	Viscoelastic loss factors for PCLDs A and B from Kung and Singh (Kung and Singh, 1998)	52
Figure 3.4	Transient response of Beam III (Experimental, Theoretical) and impact loading	58
Figure 3.5	Transient response of Beam V (Experimental, Theoretical) and impact loading	59
Figure 3.6	Transient response of Beam VI (Experimental, Theoretical) and impact loading	60
Figure 3.7	Transient response of Beam X (Experimental, Theoretical) and impact loading	61
Figure 3.8	Comparison of experimental impact forces	64
Figure 3.9	Theoretical impact loading defined by Eq. (3.23)	65
Figure 3.10	Comparison of theoretical (Eq. (3.23)) and real (Experimental case from Fig. 3.5a) impact shape	65

Figure 3.11	Transient response for different PCLD lengths	68
Figure 3.12	Transient response for different viscoelastic thicknesses . . .	69
Figure 3.13	Transient response for different constraining layer thicknesses	70
Figure 3.14	Transient response for different PCLD positions	71
Figure 3.15	Very beginning of transient response for different PCLD po- sitions	72
Figure 3.16	Long time transient response for two PCLD positions . . .	75
Figure 4.1	Effet de la position x_1 d'un tampon de longueur $L_c = L/5$ sur la réponse transitoire initiale	81
Figure 4.2	Effet de la position x_1 sur la réponse transitoire initiale pour un tampon amortissant sans masse ($L_c = L/5$, $h_c = h_b/4$, $h_c = h_b/4$)	85
Figure 4.3	Déplacement initial pour différentes longueurs de tampons amortissants ($h_c = h_b/4$)	89
Figure 4.4	Déplacement initial pour différentes longueurs de tampons amortissants sans masse ($h_c = h_b/4$)	91
Figure 4.5	Comparaison des déplacements initiaux d'une poutre avec tampon et avec tampon sans masse	93
Figure 4.6	Déplacement initial pour différentes épaisseurs de viscoélas- tique	94
Figure 4.7	Déplacement initial pour différentes épaisseurs de couche de contrainte	99
Figure II.1	Système viscoélastique à deux degrés de liberté.	130
Figure III.1	Effet de la position x_1 d'un tampon de longueur $L_c = 2L/5$ sur la réponse transitoire initiale	153

Figure III.2	Effet de la position x_1 d'un tampon de longueur $L_c = 3L/5$ sur la réponse transitoire initiale	155
Figure III.3	Déplacement initial pour différentes épaisseurs de viscoélas- tique d'un tampon sans masse	157

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	REVUE DE LA LITTÉRATURE — COMPLÉMENT . .	120
I.1	Contrôle actif	120
I.2	Un mot sur les hypothèses	121
I.2.1	Linéarité du viscoélastique	121
I.2.2	Interface	122
I.2.3	Poutre de base et couche de contrainte	122
I.2.4	Compressibilité du viscoélastique	123
I.3	Variantes et applications	126
ANNEXE II	MÉTHODE NUMÉRIQUE	128
II.1	Méthode de Nashif et généralisation	128
II.2	Scripts et fonctions Matlab	131
II.2.1	Script initial de simulation	132
II.2.2	Fichier de propriétés du système (<i>poutre.m</i>)	135
II.2.3	Script de calcul en fréquence (<i>modele.m</i>)	137
II.2.4	Script de préallocation de la mémoire (<i>Pre_All.m</i>)	141
II.2.5	Script de définition de la force (<i>force_impact.m</i>)	143
II.2.6	Script de définition des fonctions de formes d'une poutre encastrée-libre (<i>Fct_CF.m</i>)	144
II.2.7	Script de définition des termes non fonction de la fréquence (<i>Matrices_termes_constants.m</i>)	146
II.2.8	Fonction d'intégration d'expressions symboliques (<i>integrale.m</i>)	149
II.2.9	Script de libération de la mémoire I (<i>menage_frequentiel.m</i>)	150

II.2.10 Script de libération de la mémoire II (<i>menage_temporel.m</i>)	150
II.2.11 Script de calcul de la réponse transitoire (<i>re- ponse_transitoire.m</i>)	151
ANNEXE III FIGURES	152

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

Accronymes

AM	<i>Assumed Modes</i>
ASTM	<i>American Society for Testing and Materials</i>
CLD	<i>Constraining Layer Damping</i>
DMA	<i>Dynamics Mechanical Anaylser</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
IFFT	<i>Inverse Fast Fourier Transform</i>
NASA	<i>National Aeronautical and Space Administration</i>
PCLD	<i>Partial Constraining Layer Damping</i>
RMS	<i>Root Mean Square</i>
TOS	<i>Time of Separation</i>

Variables et constantes

B	largeur du système
C	indice de mesure de causalité
E	module d'Young
E^*	module d'Young viscoélastique
f	fréquence [Hz]
g_n	constante de Prony
G	module de cisaillement
G^*	module de cisaillement viscoélastique
G_s	module de restauration
G_l	module de perte

$G_R(t)$	module de relaxation
G^∞	valeur d'équilibre du module de relaxation
G_0	module de relaxation instantané
h	épaisseur d'une couche
$h(t)$	force d'impact transversale
H	épaisseur totale d'une poutre sandwich
I	second moment de surface
j	$\sqrt{-1}$
L	longueur de la poutre de base, Lagrangien
L_c	longueur du tampon amortissant
n_w	quantités de modes transversaux
n_b	quantités de modes longitudinaux de la poutre de base
n_c	quantités de modes longitudinaux de la couche de contrainte
N	quantité de points utilisés dans la discrétisation du domaine temporel
N_{dof}	quantité totale de modes
N_p	nombre de termes utilisés dans une série de Prony
Q	force généralisée
t	temps
T	énergie cinétique

T_{max}	temps maximum couvert lors de la simulation numérique
$u_b(x, t)$	déplacement longitudinal la poutre de base
$u_c(x, t)$	déplacement longitudinal la couche de contrainte
$U_b(x)$	fonction admissible associée au mouvement longitudinal de la poutre de base
$U_c(x)$	fonction admissible associée au mouvement longitudinal de la couche de contrainte
V	énergie potentielle
$w(x, t)$	déplacement transversal du système
w_{theo}^{max}	amplitude maximale de déplacement théorique d'une poutre nue
$W(x)$	fonction admissible associée au mouvement transversal
\mathbb{W}	travail des forces extérieures et des forces non conservatrices
x_1	position où débute la couverture du tampon
x_2	position où se termine la couverture du tampon
γ_1, γ_2	angles définis à la figure 3.2
δ	fonction Dirac
$\delta\mathbb{W}$	travail virtuel
$(\Delta RMS)_{max}$	écart maximal entre les valeurs RMS
Δt	incrément de temps
η	facteur de perte

$\xi_b(t)$	coordonnée généralisée associée à la discrétisation du mouvement longitudinal de la poutre de base
$\xi_c(t)$	coordonnée généralisée associée à la discrétisation du mouvement longitudinal de la couche de contrainte
ρ	masse volumique [kg/m ³]
τ_n	paramètres de la série de Prony (<i>retardation time</i>)
$\psi(t)$	coordonnée généralisée associée à la discrétisation du mouvement transversal du système
ω	fréquence circulaire [rad/s]
τ	période [s]

Indices

b	Poutre de base
c	Couche de contrainte
v	Couche de viscoélastique
i	1, 2, , ... , n_w
j	1, 2, , ... , n_b
k	1, 2, , ... , n_c
r	1, 2, , ... , N_{dof}
n	terme de la série de Prony
α	représente b ou c
β	représente b , c ou v

Autres symboles

$(\dot{})$	$\partial()/\partial t$
$(\ddot{})$	$\partial^2()/\partial t^2$
$()_x$	$\partial()/\partial x$
$()_{xx}$	$\partial^2()/\partial x^2$
$\overline{()}$	terme ayant subi une transformée de Fourier
$()_{\sim}$	terme relatif à la réponse impulsionnelle
\mathcal{F}	transformée de Fourier
\mathcal{F}^{-1}	transformée de Fourier inverse
\Re	partie réelle
\Im	partie imaginaire
$*$	opérateur de convolution

INTRODUCTION

La présence de vibrations est souvent nuisible et peut engendrer de sérieux dommages. Depuis longtemps, de nombreux travaux ont porté sur les méthodes utilisées pour les enrayer. Que ce soit dans le but de minimiser les vibrations de machines-outils, pour la conception de la suspension des véhicules ou encore pour limiter les oscillations de structures soumises à des séismes, l'amortissement revêt une importance capitale sur la durée de vie des infrastructures. Il joue de plus un rôle primordial dans le domaine de la santé et de la sécurité. Parmi les risques encourus pour la santé reliés aux vibrations, les bruits d'impact s'avèrent être d'une grande importance.

Or, plusieurs opérations industrielles font intervenir le phénomène d'impact : par exemple, l'assemblage de structures par rivetage. Les vibrations qui s'en suivent, constituant essentiellement le régime transitoire d'une durée de quelques millisecondes, produisent un niveau sonore très élevé auquel sont soumis les travailleurs. Malgré leur protection auditive (casques, bouchons), certains d'entre eux développent des problèmes de surdité partielle ou totale.

Les normes de santé et de sécurité au travail évoluent rapidement et sont de plus en plus strictes. Alors que quelques années auparavant, il s'agissait d'un sujet auquel on ne prêtait que peu d'attention, dans quelques années, ces mêmes normes pourraient obliger les industries à limiter le niveau sonore de leur entreprise à ce que l'oreille peut supporter et ce, sans protection. Il est donc impératif de développer une technique d'amortissement efficace qui soit applicable directement à la source du problème.

En se basant sur le fait que les matériaux viscoélastiques possèdent une grande capacité de dissipation énergétique, l'utilisation de tampons construits à l'aide de ces matériaux constitue une solution ingénieuse pour contrer les vibrations qui sont responsables de la variation de pression d'air engendrant le bruit. On parle de *traitement contraint* lorsqu'une couche de viscoélastique est installée entre la structure à amortir et une couche de contrainte. Lorsque le tampon ne recouvre pas la structure en entier, on parle alors d'un *traitement partiel contraint*. Cependant, bien que l'utilisation de ces traitements soit efficace pour amortir les vibrations en régime harmonique, leur capacité à amortir le régime transitoire suite à un impact demeure méconnue.

Pour parvenir à déterminer l'effet de ces tampons sur l'amortissement du régime transitoire, un modèle analytique sera présenté. Un système constitué d'une poutre soumise à un impact et sur laquelle est installé un tampon amortissant sera étudié. Le modèle sera validé à l'aide des résultats expérimentaux en régime harmonique et en régime transitoire avant d'être utilisé pour mener une étude paramétrique sur différentes configurations du tampon. La paramétrisation en question sera effectuée en tenant compte de quatre facteurs :

1. La longueur du traitement amortissant (tampon viscoélastique)
2. La position du tampon
3. L'épaisseur de la couche de viscoélastique
4. L'épaisseur de la couche de contrainte

Suite à cette étude, des recommandations seront émises quant à l'utilisation de tampons viscoélastiques en régime transitoire.

Le mémoire est constitué de cinq chapitres. Le premier passe en revue la littéra-

ture pertinente à l'élaboration de la théorie et du modèle. À la lumière du premier chapitre, le second chapitre présente les orientations et les objectifs propres au projet, ainsi que la démarche suivie pour y parvenir. Au troisième chapitre, un article est présenté. Le modèle est développé et la méthode numérique de solution est présentée. C'est aussi dans ce chapitre que la validation des résultats est effectuée à partir de la littérature et de résultats expérimentaux. La dernière partie de ce chapitre présente une analyse sommaire de résultats numériques. C'est cependant au chapitre 4 que la majeure partie des résultats obtenus à l'aide du modèle sont présentés et analysés. Enfin, le dernier chapitre constitue une discussion générale sur l'ensemble du projet.

CHAPITRE 1

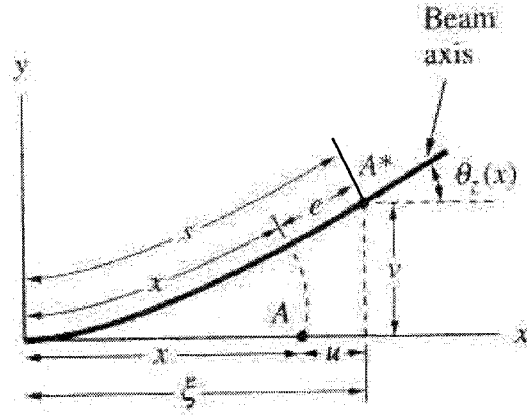
REVUE CRITIQUE DE LA LITTÉRATURE

Ce chapitre présente une revue de la littérature pertinente afin de démontrer l'orientation et la place qu'occupe ce travail dans le domaine de l'amortissement de structures soumises à des impacts. On y retrouve de l'information sur le traitement mathématique des poutres et de leurs particularités géométriques. On traite par la suite le comportement viscoélastique et les représentations dans les domaines fréquentiel et temporel que l'on peut en avoir. Le comportement des poutres sandwich, dont la couche centrale est constituée ou non de matériau viscoélastique, est survolé via l'apport de plusieurs auteurs. Il est par la suite question de l'historique et de l'utilisation des traitements partiels contraints, d'abord pour leur utilisation en régime harmonique, puis par la suite, en régime transitoire. Enfin, une synthèse est présentée d'où se dégagent les objectifs exacts de ce travail.

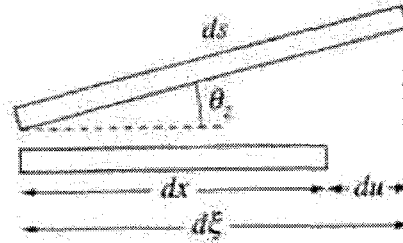
L'annexe I présente une revue de la littérature complémentaire où sont discutés des sujets connexes mais non directement reliés aux développements qui suivront.

1.1 Les poutres

L'étude du comportement vibratoire des poutres minces et homogènes constitue l'entrée en matière de l'analyse des milieux continus en général.



(a)



(b)

Figure 1.1 – Représentation du déplacement de l'axe neutre (a) et du raccourcissement de la projection (b). (Baruh, 1998).

1.1.1 Géométrie

La géométrie des poutres joue un rôle essentiel lors du développement des équations du mouvement. Le raccourcissement de la projection (*Shortening of Projection*) est un volet de la géométrie qui a suscité beaucoup de discussions. La figure 1.1 représente le comportement de l'axe neutre d'une poutre dans le plan xy : En subissant une déformation transversale et une déformation longitudinale, un point A se situant sur l'axe neutre de la poutre au repos (le long de l'axe x) devient le point A^* . Alors,

– $s(x, t) = x + e(x, t)$ correspond à position de A^* sur la poutre à partir de $x = 0$;

- $e(x, t)$ est la contribution due à l’allongement de la poutre ;
- $\xi(x, t) = x + u(x, t)$ est la projection de l’axe neutre déformé sur la position initiale de l’axe neutre le long de x .

En considérant un élément différentiel tel que présenté à la figure 1.1b, $du = d\xi - dx$ représente le raccourcissement de la projection (*Shortening of Projection*). Ce nom provient du fait que s’il n’y a pas de déformation longitudinale, alors du prend une valeur négative et x diminue.

Selon Sharf, cette notion a été traitée de plusieurs façons et semble être un sujet de mésentente entre les auteurs (Sharf, 1995). C’est pourquoi il publia une importante revue des méthodes utilisées pour caractériser les effets du raccourcissement de la projection sur les vibrations de grandes amplitudes. Il a répertorié les modèles pour quantifier le phénomène, les commentaires qu’ils ont reçus et certaines précisions ou clarifications concernant leur application.

Dans le même ordre d’idée, critiquant le fait que les modèles traditionnels tenaient compte des déformations longitudinales mais pas du raccourcissement de la projection, Radisavljevic et Baruh ont comparé l’effet de chacun de ces phénomènes (Baruh, 1998; Radisavljevic and Baruh, 2001). Ils démontrèrent que pour une poutre mince, la déformation axiale et le raccourcissement de la projection ont un effet comparable sur les vibrations et même que, pour certains cas, le raccourcissement de la projection a un effet légèrement plus important. Dans le présent ouvrage, l’approche présentée par Radisavljevic et Baruh sera utilisée.

1.1.2 Méthodes analytiques

L'utilisation de méthodes classiques comme celle de Newton pour trouver les équations du mouvement devient rapidement ardue lorsque les systèmes se complexifient. C'est pourquoi les poutres peuvent aussi être étudiées à l'aide de méthodes de mécanique analytique. Celles-ci sont essentiellement basées sur le calcul des énergies cinétique et potentielle du système. Les poutres étant des corps déformables, l'énergie potentielle représente donc leur énergie de déformation.

Une fois les énergies calculées, le principe étendu de Hamilton peut être appliqué, tel que montré, entre autres, par Baruh et par Balachandran (Baruh, 1998; Balachandran and Magrab, 2004). Le principe est le suivant :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T(t) - V(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbb{W} dt = 0, \quad (1.1)$$

où T et V sont les énergies cinétique et potentielle et où \mathbb{W} est le travail des forces extérieures et des forces non conservatrices. Il est d'usage de négliger l'inertie en rotation car elle est faible par rapport à l'énergie de translation. L'équation (1.1) mène directement à l'équation du mouvement. Cette méthode représente un avantage certain : les conditions aux limites du système sont automatiquement incluses dans l'équation du mouvement (ce qui est particulièrement utile lorsqu'elles sont difficilement identifiables). Cependant, l'application de l'équation (1.1) peut s'avérer longue et difficile.

1.2 Modèle viscoélastique

Les matériaux présentant à la fois un comportement élastique et un comportement visqueux sont dits viscoélastiques. De nombreux ouvrages traitent de la viscoélasticité et des différents modèles qui sont utilisés pour la représenter (voir entre autres (Ferry, 1980)). Cette section traite d'éléments de viscoélasticité reliés au domaine de l'amortissement.

1.2.1 Le module complexe

L'utilisation du concept de rigidité complexe est une méthode grandement répandue pour représenter le comportement viscoélastique d'un matériau. En particulier, le module de cisaillement complexe G^* d'un matériau est exprimé de la manière suivante :

$$G^*(\omega) = G_s(\omega)[1 + j\eta(\omega)], \quad (1.2)$$

$$\eta(\omega) = \frac{G_l(\omega)}{G_s(\omega)}, \quad (1.3)$$

où G_s et G_l sont respectivement les modules de restauration et de perte. Le facteur de perte constitue la mesure de la capacité amortissante du viscoélastique et est représenté par η . Comme l'indiquent les équations (1.2) et (1.3), ces paramètres sont fonctions de la fréquence. Malgré ce fait, de nombreux auteurs ont modélisé ces propriétés comme étant constantes (voir entre autres (Rikards and Barkanov, 1992; Cai et al., 2004)). Souvent, ceux qui ont utilisé cette hypothèse l'ont fait en supposant un facteur de perte très élevé (de l'ordre de $\eta = 1$). En pratique,

toutefois, l'obtention d'un facteur de perte aussi élevé est peu réaliste. Certains auteurs ont dénoncé le problème lié aux propriétés constantes en fréquence (Nashif et al., 1985; Chen et al., 2004).

Le principal inconvénient de la représentation par le module complexe vient du fait qu'elle est élaborée sur l'hypothèse d'un chargement cyclique du matériau (Wang and Wereley, 2002; Vasques et al., 2006; Moreira and Dias Rodrigues, 2006). Ainsi, pour que son utilisation soit valable lors d'une étude transitoire, il faut s'assurer qu'une cohérence temps-fréquence soit respectée.

1.2.2 Cohérence temps-fréquence

Un modèle dans le domaine fréquentiel sera dit cohérent en temps et en fréquence s'il possède un équivalent temporel qui est physiquement admissible. Il existe certains modèles qui permettent d'obtenir une équivalence temps-fréquences. Il sera ici question des deux modèles les plus répandus¹ : le modèle GHM et les séries de Prony.

1.2.2.1 Le modèle GHM

En 1993, une nouvelle modélisation des matériaux viscoélastiques a été publiée (McTavish and Hughes, 1993). Le modèle GHM (du nom de ses inventeurs Golla, Hughes et McTavish) mène à une représentation du comportement viscoélastique

¹Les modèles ADF (*Anelastic Displacement Fields*) et *Fractional Calculus* ne sont pas traités étant donné le peu d'auteurs qui les ont utilisés dans la littérature consultée. Il est toutefois possible de trouver de l'information à leur sujet dans (Lesieutre and Bianchini, 1995) et (Bagley and Torvik, 1983).

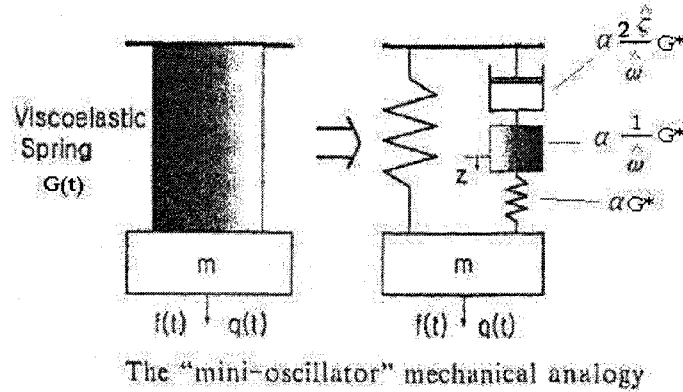


Figure 1.2 – Analogie mécanique du modèle GHM. Tirée de (Na et al., 2006)

comme une somme de mini-oscillateurs et dont la forme dans le domaine de Laplace est :

$$s\tilde{G}(s) = G^\infty \left[1 + \sum_k \alpha_k \frac{s^2 + 2\hat{\zeta}_k \hat{\omega}_k s}{s^2 + 2\hat{\zeta}_k \hat{\omega}_k s + \hat{\omega}_k^2} \right], \quad (1.4)$$

où G^∞ correspond à la valeur d'équilibre du module de relaxation du matériau ($G^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} G_R(t)$), α_k est un facteur participatif positif, $\hat{\zeta}_k$ est le taux d'amortissement et $\hat{\omega}_k$ est la fréquence naturelle chacun des k mini-oscillateurs. L'analogie mécanique de ce modèle est représentée à la figure 1.2. Le modèle GHM a été repris et modifié de manière à obtenir une meilleure précision numérique (Friswell et al., 1997). L'avantage de la représentation GHM est sa capacité à représenter le comportement d'un matériau viscoélastique dans le temps, en effectuant la transformée de Laplace inverse de l'équation (1.4). De nombreux auteurs ont utilisé le modèle GHM autant dans les modèles par éléments finis que pour les représentations analytiques (Lam et al., 1997; Na et al., 2006). Mentionnons par contre la difficulté rencontrée au moment de déterminer les paramètres pour la représentation d'un matériau réel.

1.2.2.2 Séries de Prony

Les séries de Prony constituent une autre méthode pour représenter le comportement des matériaux viscoélastiques. Elles sont composées d'une somme de fonctions exponentielles décroissantes de la forme :

$$G_R(t) = G_0 - G_0 \sum_{n=1}^{N_p} g_n + \sum_{n=1}^{N_p} G_0 g_n e^{\frac{-t}{\tau_n}}, \quad (1.5)$$

où $G_0 = \lim_{t \rightarrow 0} G_R(t)$. Les constantes τ_n sont appelées « *retardation time* » et les paramètres g_n sont les constantes de Prony. L'avantage de travailler avec cette représentation est de pouvoir se promener aisément du domaine temporel au domaine fréquentiel et inversement. Ainsi, de l'équation (1.5), on obtiendra la représentation en fréquence en appliquant une transformée de Fourier :

$$G^* = G_0 - G_0 \sum_{n=1}^{N_p} g_n + \sum_{n=1}^{N_p} \frac{G_0 g_n \tau_n j \omega}{1 + \tau_n j \omega}. \quad (1.6)$$

À partir de l'équation (1.6), on peut retrouver la forme complexe dont il était question précédemment, en ayant toutefois une équivalence temporelle : $G_s = \Re(G^*)$ et $G_l = \Im(G^*)$. De nombreuses méthodes ont été présentées pour déterminer les coefficients nécessaires à l'élaboration d'une série de Prony, trois d'entre elles sont répertoriées ici.

Un algorithme de calcul permettant de déterminer les paramètres d'une série de Prony à partir de données connues dans le domaine fréquentiel a été présenté par Rogers (Rogers, 1984). De cette façon, à partir de la rigidité en fréquence et de la phase, il est possible d'extraire les données nécessaires à la formation de la série.

Cette méthode est particulièrement utile lorsque le fabricant fournit l'information concernant le comportement en fréquence du matériau.

Plusieurs méthodes ont été proposées afin de déterminer les paramètres de la série dans le cas où des tests doivent être effectués en laboratoire. Notamment, dans un mémoire technique de la NASA, on propose une méthode pour déterminer les paramètres d'une série à partir d'essais de fluage, de relaxation et de chargement en rampe dans le domaine temporel (Chen, 2000). Ces données temporelles sont soumises à une analyse par régression non-linéaire. Les séries de Prony résultantes contiennent l'information fournie par le chargement et le déchargement produisant ainsi une excellente approximation du comportement du viscoélastique lors d'utilisation nécessitant une séquence de chargement complexe. Park et Kim, quant à eux, ont proposé une façon d'obtenir les paramètres lorsque les données expérimentales sont significativement dispersées dans le temps (Park and Kim, 2001).

1.2.3 Obtention des propriétés viscoélastiques

Comme le mentionnent Slanik et al., les fabricants de matériaux viscoélastiques préfèrent fournir l'information concernant leurs produits dans le domaine temporel (Slanik et al., 2000). Afin de déterminer les propriétés en fréquence des matériaux, certaines méthodes sont disponibles. Jones a présenté une revue de certaines de ces méthodes dites simples et couramment utilisées (Jones, 1974). Par ailleurs, l'ASTM spécifie dans ses normes une procédure typique pour mesurer les propriétés en fréquence de matériaux viscoélastiques à l'aide de poutres encastrees-libres de différentes configurations (ASTM, 2004).

Dans sa monographie, Ferry présente le principe d'équivalence température-fréquence qui demeure aujourd'hui la méthode de référence pour déterminer les propriétés mécaniques en fréquence des matériaux viscoélastiques (Ferry, 1980). Ce principe de superposition repose sur le fait que les domaines fréquentiel et temporel sont liés par une variable commune. Ainsi, en connaissant le comportement dans un des deux domaines, il est possible de déterminer le comportement dans l'autre domaine. Cette méthode présente le principal avantage d'étendre la couverture fréquentielle bien au-delà du domaine couvert par les tests mécaniques. Par exemple, l'utilisation d'une DMA (*Dynamics Mechanical Analyser*) limite les essais en fréquence sur la plage 0–200 Hz alors que l'utilisation du principe température-fréquence permet d'étendre cette couverture jusqu'à plusieurs kiloHertz (Fisher et al., 2004). L'application du principe nécessite toutefois — comme son nom l'indique — que les essais expérimentaux soient menés dans un environnement où la température est rigoureusement contrôlée.

Certains matériaux ont été analysés et leurs propriétés en fréquence sont présentées dans la monographie de Nashif (Nashif et al., 1985). Notons cependant que les données représentées sont sous forme de graphiques logarithmiques limitant ainsi la précision des informations. De plus, certains de ces matériaux ne sont plus aujourd'hui disponibles.

1.3 Les poutres sandwich

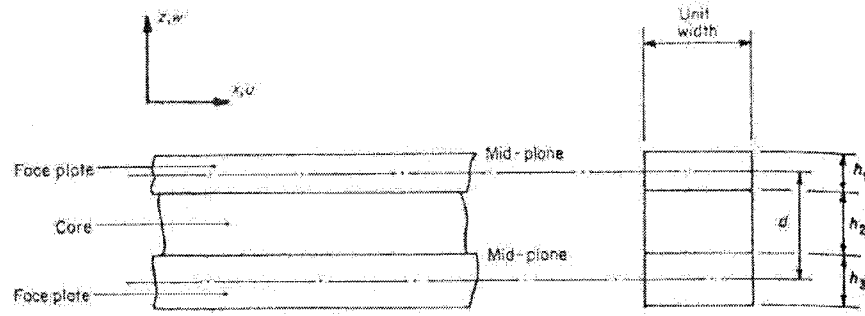
Depuis longtemps, l'étude des poutres sandwich a été un sujet de recherche pour plusieurs essentiellement à cause de la capacité structurale élevée de ces poutres par

rapport à leur poids par unité de longueur. De nombreuses hypothèses utilisées pour le traitement des poutres sandwich sont reprises pour les traitements partiels. De plus, l'utilisation d'un matériau viscoélastique en guise de traitement amortissant contraint est d'abord apparue dans le cas d'une poutre sandwich.

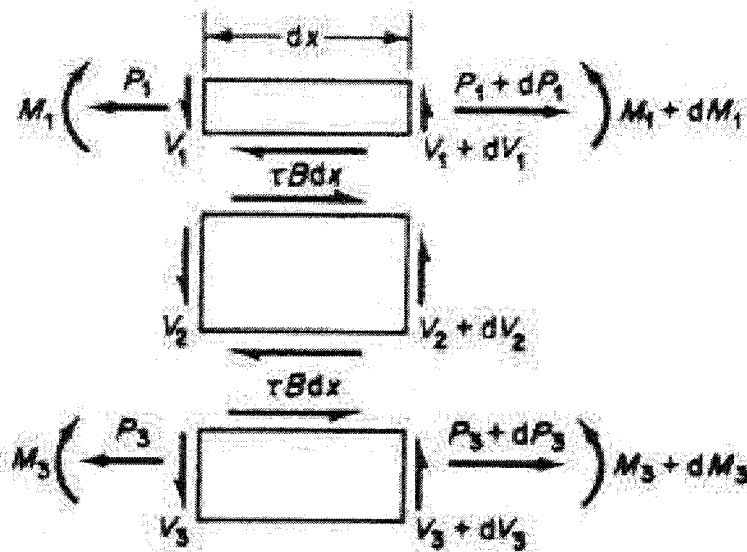
En 1961, Raville et al. ont publié un article concernant les fréquences naturelles des poutres sandwich encastrées-encastrées (Raville et al., 1961). Une méthode analytique y est développée en utilisant une approche énergétique et en supposant que le système demeure conservatif. Les multiplicateurs de Lagrange sont utilisés pour satisfaire les conditions aux limites. Les fréquences naturelles sont exprimées sous la forme d'une série infinie. Des résultats expérimentaux sont présentés et corroborent les résultats analytiques obtenus. Cependant, le montage expérimental utilisé ne permettait pas d'obtenir les fréquences inférieures (modes 1 à 4). La méthode est somme toute lourde mathématiquement compte tenu de la présence de solutions en série.

Ce sont par contre les célèbres travaux de Mead et Markus qui marquèrent le domaine (Mead and Markus, 1969). En effectuant un bilan de forces et de moments sur un élément de poutre, ils ont dérivé une équation différentielle d'ordre 6 représentant le comportement transversal d'une poutre sandwich dont la couche centrale est viscoélastique (figure 1.3). Notons que les axes définis à la figure 1.3a seront ceux utilisés dans le présent travail. Les hypothèses émises à ce moment ont constitué la base de nombreux travaux subséquents :

1. Les trois couches composant le sandwich sont purement élastiques et ne subissent aucune déformation en cisaillement autre que celle de la couche centrale dans le plan xz . Leur comportement est linéaire.



(a)



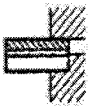
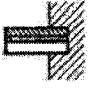
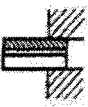
(b)

Figure 1.3 – (a) Système étudié par Mead et Markus (Mead and Markus, 1969) : Élément de poutre sandwich. (b) Bilan de forces et de moments sur les composantes d'un élément de poutre sandwich. Tirée de (Lall et al., 1988).

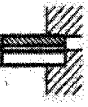


2. Les couches extérieures sont considérées comme étant des poutres minces.
3. L'inertie en rotation et l'inertie longitudinale ne sont pas prises en compte.
4. Chacune des couches est incompressible selon l'axe z . Le déplacement transversal en un point donné x est donc le même pour chacune des couches.
5. Le contact entre chacune des couches est parfait.

Avec le temps, par contre, certains ont émis des réticences relativement à ces hypothèses. Notons l'étude publiée par Huang, Reinhall et Shen qui est venue modifier le modèle original (Huang et al., 1999). En effet, Huang et al. critiquaient le fait que le modèle présenté par Mead et Markus ne satisfaisait que certaines conditions aux limites et que dans le cas de plusieurs autres, elles étaient violées ou tout simplement indéfinies. Ils présentèrent de nouvelles conditions aux limites pour satisfaire les cas défaillants (figure 1.4).

Sakiyama et al. présentèrent en 1996 une étude sur les vibrations libres des poutres sandwich dont la couche centrale pouvait être élastique ou viscoélastique (dans ce dernier cas, le comportement viscoélastique a été modélisé par un module de cisaillement complexe, sans égard la cohérence temps-fréquence) (Sakiyama et al., 1996; Sakiyama, 1996). Le modèle utilisé pour l'analyse se base sur les premières études menées par Mead et Markus, en effectuant un bilan de forces et des moments sur un élément de poutre. L'équation différentielle représentant le système est par contre solutionnée en utilisant la fonction de Green discrète et mène au calcul des fréquences naturelles de la poutre sandwich. De nombreuses comparaisons numériques sont présentées et démontrent que la technique de solution fonctionne pour des conditions aux limites particulières. Une étude est par la suite menée pour une variété de conditions aux limites classiques en paramétrant le rapport G/E de

Boundary Conditions		The Mead-Markus Model		
<i>Clamped A</i>		Undefined		
<i>Clamped B</i>		$w' = 0$	$\frac{\partial w'}{\partial x'} = 0$	$\tau = 0$
<i>Clamped C</i>		$w' = 0$	$\frac{\partial w'}{\partial x'} = 0$	$P = 0$

(a)

Boundary Conditions		The Modified Mead-Markus Model			
<i>Clamped A</i>		$w' = 0$	$\frac{\partial w'}{\partial x'} = 0$	$u_1' = 0$	$\frac{\partial u_1'}{\partial x'} = 0$
<i>Clamped B</i>		$w' = 0$	$\frac{\partial w'}{\partial x'} = 0$	$u_1' = 0$	$u_2' = 0$
<i>Clamped C</i>		$w' = 0$	$\frac{\partial w'}{\partial x'} = 0$	$\frac{\partial u_1'}{\partial x'} = 0$	$\frac{\partial u_2'}{\partial x'} = 0$

(b)

Figure 1.4 – Modifications apportées au modèle de Mead et Markus par Huang et al. (a) Conditions aux limites établies par Mead et Markus (Mead and Markus, 1969). (b) Conditions aux limites modifiées par Huang et al. (Huang et al., 1999).

poutres sandwich symétriques où G (ou G^*) est le module de cisaillement de la couche centrale et E est le module d'Young des couches extérieures.

Casbanska-Plackiewicz publia une comparaison des vibrations libres de sandwichs composés d'une couche centrale viscoélastique (Casbanska-Plackiewicz, 2000). Les conditions aux limites utilisées sont celles d'appuis simples et sont appliquées aux trois couches du système. L'article conclut en stipulant que l'utilisation des poutre de Timoshenko en guise de couches extérieures n'est pas justifiée dans les cas où $H/L < 0,3$, où H est l'épaisseur totale du sandwich et L , sa longueur.

En 2003, Banerjee proposa une méthode d'analyse des poutres sandwich symétriques en utilisant une matrice de raideur dynamique (Banerjee, 2003). D'abord, le principe de Hamilton est utilisé et il conduit à l'élaboration de deux équations du mouvement couplées pouvant être combinées de façon à ne former qu'une seule équation différentielle. Cette dernière mène à la formulation de la matrice de rigidité dynamique dont la résolution fournit les fréquences naturelles et la forme des modes du système. Cette méthode reste cependant limitée en pratique. En effet, elle n'est valable que pour les poutres sandwich dont les couches supérieure et inférieure sont identiques. De plus, une des hypothèses de travail consiste à négliger la masse de la couche centrale, limitant ainsi l'effet d'inertie. Des travaux subséquents ont par contre remédié à ces lacunes en modélisant à nouveau le système sandwich, mais cette en fois en modélisant les couches supérieure et inférieure du système comme des poutres de Timoshenko (Banerjee et al., 2006). De plus, la couche centrale s'est vue attribuer une masse ainsi qu'une inertie en rotation et est désormais en mesure de reprendre les efforts axiaux.

Chen et al. ont proposé une nouvelle méthode d'analyse des vibrations libres d'une poutre sandwich (pouvant être composée de plusieurs couches) en utilisant une combinaison de l'espace d'état et de la méthode de quadrature différentielle² (Chen et al., 2003). Basée sur les théorèmes d'élasticité des matériaux, ce développement a l'avantage de ne pas introduire de limite quant à l'épaisseur du système. Le développement est par contre effectué en supposant que les couches inférieure et supérieure du sandwich sont de même épaisseur. Les résultats obtenus par Chen et al. démontrent que leur méthode fonctionne³.

La méthode des éléments finis pour l'étude des poutres sandwich est grandement utilisée. Ahmed publia en 1971 une technique d'analyse par éléments finis permettant d'étudier le comportement vibratoire d'une poutre sandwich dont la couche centrale est constituée de nid d'abeille élastique. Notons aussi les travaux de Rikards et al. qui modélisèrent le comportement vibratoire de poutres et de plaques sandwich en régime harmonique (Rikards et al., 1992; Rikards and Barkanov, 1992). Bien qu'ils mentionnèrent le fait que les propriétés d'un matériau viscoélastique doivent varier en fréquence, ils n'ont pas appliqué ce principe en choisissant un module de rigidité et un facteur de perte constants. Dans le même ordre d'idée, Barkanov a traité de la difficulté à effectuer une bonne discrétisation des structures par éléments finis et a proposé une méthode pour remédier à la complexité du problème en diminuant la taille des matrices à traiter (Barkanov, 1993).

²Méthode qu'ils nommèrent SS-DQM : *State Space-Differential Quadrature Method*.

³Notons que, selon Chen et al., lors de l'analyse d'une poutre encastree-libre (DATA-1 (CF), Table 3), le mode 6 possède une fréquence naturelle de 1682,761 Hz, alors que la valeur de comparaison avec Ahmed (Ahmed, 1971) est indiquée comme étant « *Result not available or presented* ». Cependant, lors de notre analyse, à l'instar de celle effectuée par Ahmed, cette fréquence naturelle n'apparaît pas, laissant supposer une erreur numérique dans les travaux de Chen et al. La valeur n'apparaît pas non plus dans l'analyse de Sakiyama (Sakiyama et al., 1996).

Plusieurs méthodes ont donc été publiées pour comprendre le comportement des poutres sandwich. Il est cependant intéressant de noter que pour la plupart de ces modèles, très peu de résultats expérimentaux sont présentés. La plupart des auteurs se contentent de valider les réponses obtenues par leur modèle en régime harmonique par rapport à d'anciens résultats aussi obtenus analytiquement ou numériquement. Il y a de plus un manque important de données concernant le régime transitoire de vibration.

1.4 Les traitements partiels contraints

Les structures sandwich présentées à la section 1.3 sont surtout utilisées comme élément structural. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle les couches centrales dont il était question précédemment sont, dans plusieurs cas, uniquement élastiques. Si le but est d'augmenter l'amortissement d'une structure, on parle alors de tampon amortissant et le matériau utilisé est de type viscoélastique. À part quelques travaux (voir par exemple (Kim and Kim, 2004) qui traitent de l'optimisation d'un traitement non contraint), la majorité des publications recensées portent sur les traitements amortissants contraints. Dans l'optique de limiter la masse ajoutée au système devant être amorti et dans le but de sauver des coûts, l'utilisation d'un traitement partiel (i.e. la longueur du tampon amortissant, L_c , est inférieure à la longueur de la poutre de base, L , devant être amortie) a été envisagée par plusieurs auteurs.

Bien que le tampon amortissant n'ait pas la même longueur que la poutre de base et à moins d'avis contraire, beaucoup d'auteurs ont continué à utiliser les

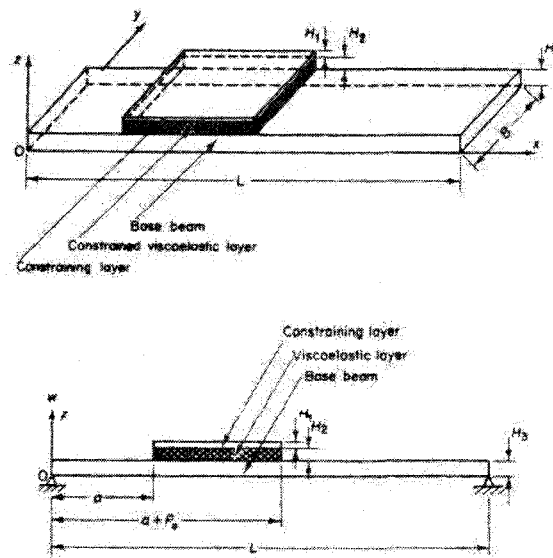


Figure 1.5 – Schéma représentant la poutre étudiée par Lall et al. (Lall et al., 1988).

hypothèses de Mead et Markus dont il a été question à la section 1.3. En 1988, Lall, Asnani et Nakra ont proposé trois méthodes différentes (dont deux approximatives et une exacte) pour analyser le comportement harmonique d'une poutre soumise à un traitement amortissant partiel (figure 1.5), (Lall et al., 1988). En plus des hypothèses émises précédemment, Lall et al. supposent que l'ajout d'un tampon n'affecte pas la forme des modes de la poutre de base. Le premier modèle proposé suit la méthodologie de Mead et Markus en effectuant des bilans de forces et de moments sur des éléments du système. Le second modèle quant à lui est basé sur la méthode de Rayleigh-Ritz. Enfin, la solution exacte proposée est constituée d'une combinaison de la théorie des poutres minces pour les endroits non-couverts et de la théorie des laminés pour la partie couverte (en imposant des conditions de continuité au changement de section). La variation des propriétés du viscoélastique dans le domaine fréquentiel n'a toutefois pas été incluse dans ces formulations. Les résultats pour différents cas sont présentés selon les trois méthodes et comparés

entre eux. Aucune recommandation n'est émise.

Marcelin et al. ont fait une analyse par éléments finis en supposant que les couches constituant le tampon étaient beaucoup plus minces que la poutre de base devant être amortie (Marcelin et al., 1992). Bien qu'ils mentionnent le fait que les propriétés du viscoélastique doivent varier en fréquence, les calculs menés tiennent compte de propriétés constantes. Dans ces conditions, une méthode d'optimisation des tampons basée sur la maximisation du facteur de perte du système pour un mode en particulier est présentée. Une fois le principe d'optimisation établi, peu de calculs numériques sont effectués. En guise de conclusion générale, Marcelin et al. stipulent qu'une couverture complète ne conduit pas nécessairement à l'obtention d'un meilleur facteur de perte, notamment pour les cas où le viscoélastique est rigide.

Kung et Singh proposèrent une méthode pour étudier les vibrations harmoniques d'une poutre amortie par un ou plusieurs tampons amortissants (Kung and Singh, 1998). Leur objectif était d'intégrer dans leur modèle les déformations longitudinales, en flexion et en rotation et ce, pour chacune des trois couches (en omettant les déformations en cisaillement présentes dans la poutre de base et dans la couche de contrainte). Pour y parvenir, ils ont déterminé les énergies cinétique et potentielle du système et ils ont appliqué la méthode de Rayleigh-Ritz. Le développement effectué tient compte des différentes conditions aux limites des trois couches. Ils ont cependant concentré leurs efforts sur l'étude des poutres minces en étudiant l'impact d'une discontinuité (« *cutoff* », selon l'axe x) dans le traitement ainsi que l'effet provoqué par l'installation de deux tampons amortissant sur la même structure et possédant ou non les mêmes propriétés. En 2006, Zheng, Tan et Cai publièrent une

étude concernant l'amortissement de structure par traitement contraint partiel et multiple, suivant les traces de Kung et Singh (Zheng et al., 2006).

Kung et Singh proposèrent trois méthodes approximatives pour comprendre les vibrations de structures amorties par traitement amortissant, faisant suite à leurs précédents travaux de 1998 (Kung and Singh, 1999). Leur première approximation (I) repose sur la théorie des poutres d'Euler. La seconde (II) est une simplification de la première en émettant de nouvelles hypothèses concernant le comportement viscoélastique. La troisième technique (III) est utilisée pour comprendre le comportement de tampons très courts. Les méthodes II et III ont de plus été généralisées pour les utiliser sur des tampons de plaques. Les méthodes proposées sont dites rapides en terme de calculs et servent à effectuer le design de tampon amortissant pour un seul mode dans une procédure proposée par les auteurs. Ils n'appliquent toutefois pas cette procédure.

L'utilisation des équations de Lagrange afin d'établir les équations du mouvement d'une poutre amortie par un tampon a été rapportée par Huang et al. et par Cai et al. (Huang et al., 1996; Cai et al., 2004). Pour y parvenir, en se basant sur les hypothèses présentées par Mead et Markus (Mead and Markus, 1969), les expressions concernant les énergies potentielle et cinétique sont déterminées en fonction des déplacements transversaux ($w(x, t)$, qui est le même pour chacune des couches), des déplacements longitudinaux de la poutre de base ($u_b(x, t)$) et des déplacements longitudinaux de la couche de contrainte ($u_c(x, t)$). Ces trois déplacements sont exprimés par une discrétisation selon la méthode *assumed modes* (AM). La méthode AM consiste à exprimer un déplacement sous forme d'expansion en série d'un produit de deux fonctions. La première fonction correspond à une fonction ad-

missible dans l'espace. C'est-à-dire une fonction connue qui satisfait les conditions aux limites géométriques du système étudié. La seconde fonction est un coefficient indéterminé dans le temps et agit en guise de nouvelle coordonnée généralisée. L'utilisation des équations de Lagrange combinée à la méthode AM permet de satisfaire les conditions aux limites du système via la sélection des fonctions admissibles (Baruh, 1998). De plus, cette procédure fournit une équation de la forme $([K] - \omega^2[M]) \{\vec{X}\} = \{\vec{F}\}$ où $[K]$ et $[M]$ représentent les matrices de rigidité et de masse, ω est la fréquence circulaire, \vec{X} est le vecteur de déplacements en fréquence et \vec{F} est le vecteur de forces généralisées appliquées au système. Ce résultat sous la forme d'un système d'équations algébriques est beaucoup plus facile à travailler que le serait un système d'équations différentielles comme c'est le cas lorsque le principe de Hamilton ou encore un bilan de forces et de moments sont appliqués.

Huang et al. ont proposé d'utiliser les discrétisations suivantes pour les déplacements transversaux du système et pour les déplacements longitudinaux de la poutre de base :

$$w(x, t) = \sum_i W_i(x) \psi_i(t), \quad (1.7)$$

$$u_b(x, t) = \sum_j U_{b,j}(x) \xi_{b,j}(t), \quad (1.8)$$

où $W_i(x)$ et $U_{b,j}(x)$ sont les fonctions admissibles associées aux déplacements transversaux et longitudinaux de la poutre de base respectivement, et où $\psi_i(t)$ et $\xi_{b,j}$ sont les coefficients indéterminés. Le déplacement longitudinal de la couche de contrainte, quant à lui, est obtenu par un équilibre des forces dans la direction longitudinale (étant donné l'hypothèse voulant qu'il n'y ait pas de déformation axiale

dans le viscoélastique)⁴ :

$$u_c = u_b + \left(\frac{E_b h_b h_v}{G_v^*} \right) \frac{\partial^2 u_b}{\partial x^2} - \left(h_v + \frac{h_c + h_b}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (1.9)$$

où h_b , h_v et h_c représentent respectivement les épaisseurs de la poutre de base, de la couche de viscoélastique et de la couche de contrainte, E_b correspond au module d'Young de la poutre de base et G_v^* est la module de cisaillement complexe du viscoélastique tel que défini par l'équation (1.2).

Les équations (1.7), (1.8) et (1.9) peuvent alors être introduites dans l'expression de l'énergie. De plus, Huang et al. utilisent le module complexe variant en fréquence fourni par Douglas et Yang (Douglas and Yang, 1978)⁵

$$G_v^* = 1,42 \cdot 10^5 e^{0,494 \cdot \ln(\omega/2\pi)} [1 + 1,46j]. \quad (1.10)$$

Cai et al., quant à eux, croient que l'utilisation de l'équation (1.9) produit une contrainte supplémentaire dans le système conduisant à une rigidité supérieure à la réalité. Ils proposent donc d'utiliser avec les équations (1.7) et (1.8) une troisième discrétisation de la forme :

$$u_c(x, t) = \sum_k U_{c,k}(x) \xi_{c,k}(t), \quad (1.11)$$

où $U_{c,k}(x)$ est une fonction admissible et $\xi_{c,k}(t)$ est un coefficient indéterminé. Les résultats qu'ils présentent concernent des poutres simplement supportées et encastrées-libres. Trois types de viscoélastiques sont utilisés. Ils sont caractérisés

⁴Il s'agit de l'équation rapportée dans ces deux références : (Huang et al., 1996; Cai et al., 2004). Il semble cependant qu'elle soit inconsistante sur le plan des unités.

⁵Il sera question de l'article de Douglas et al. à l'annexe I.

par leur module de cisaillement complexe :

- « *Soft* » $\implies 0,896 \cdot (1 + 1,46j)$ MPa
- « *Hard* » $\implies 9,890 \cdot (1 + 1,46j)$ MPa
- « *Extremely Hard* » $\implies 1 \cdot (1 + 1,46j)$ GPa

Ces propriétés ne varient pas en fréquence et possèdent un facteur de perte très élevé ⁶.

Yaman a présenté en 2005 une étude harmonique par éléments finis où il a considéré une poutre encastree-libre partiellement amortie par un tampon viscoélastique contraint (Yaman, 2005). L'étude était cependant limitée à un tampon amortissant dont l'origine se situait à l'encastrement de la poutre de base. Les propriétés du viscoélastique étaient considérées constantes en fréquence. De plus, Yaman a émis des recommandations concernant l'amortissement du premier mode. En ce sens, il stipule que :

- Pour un rapport $h_c/h_b = 0,5$ et pour $h_v = 0,0015$ m :
 - La fréquence naturelle du système augmente en fonction de L_c/L jusqu'à ce que $L_c/L = 0,7$. À partir de ce point, la fréquence naturelle diminue.
 - Le facteur de perte du système atteint une valeur maximale à $L_c/L = 0,5$.
- L'augmentation de l'épaisseur de la couche viscoélastique ($h_v/h_b \in [0 - 1, 2]$) fait

⁶Il est ici important de préciser certains points contenus dans l'article de Cai et al. D'abord, dans la résolution du système, la force utilisée dans le développement est $f(x_f, t) = f_0 \delta(x - x_f) e^{j\omega t}$. Cependant, l'excitation appliquée est périodique dans le temps (et non dans l'espace) et devrait donc s'écrire $f(x_f, t) = f_0 \delta(x - x_f) e^{j\omega t}$. De plus, l'équation (25) représentant la fonction admissible transversale devrait s'écrire de la façon suivante : $W_i(x) = \sin(\beta_i x) - \sinh(\beta_i x) \underbrace{-}_{\uparrow} \gamma_i [\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x)]$. Enfin, en ce qui a trait à la fonction admissible d'une

couche de contrainte libre-libre, l'indice i indiqué n'est pas juste. En effet, tel qu'indiqué, le mode rigide de la couche n'est pas inclus. Il faudrait plutôt lire : $i = 0, 1, 2, \dots$. Notons de plus que certaines coquilles se sont glissées au début de la section 4 de l'article. Notamment, la masse volumique de la poutre de base en aluminium devrait être 2710 kg/m^3 et non 2110 kg/m^3 . À la fin de la seconde ligne, on devrait lire ρ_c et non ρ_b .

en sorte que, pour un rapport constant L_c/L :

- Le facteur de perte augmente pour atteindre une valeur optimale pour $h_v/h_b \in [0, 9 - 1]$ à partir de laquelle un plateau est atteint.
- La fréquence naturelle augmente sans toutefois atteindre de plateau (du moins sur la plage étudiée).

Sur le plan des recommandations, Nashif affirme qu'un traitement surfacique contraint devrait être conçu de façon à ce que la couche de contrainte soit aussi rigide que possible, sans toutefois dépasser la rigidité de la poutre de base à amortir (Nashif et al., 1985).

1.5 Régime transitoire

L'analyse transitoire a été dans bien des cas le sujet d'études par éléments finis, alors que les modèles analytiques étaient plutôt laissés de côté. Contrairement au régime harmonique, les analyses menées l'ont été en tenant compte des propriétés variables en fréquence, en utilisant soit le modèle GHM ou les séries de Prony.

Nashif et al. présentent une méthode d'analyse du domaine temporel d'un système viscoélastique à un degré de liberté (Nashif et al., 1985). Les propriétés étant définies en fonction de la fréquence, ils proposent de solutionner le système dans le domaine fréquentiel. En se basant sur le fait que, pour un matériau réel, la partie imaginaire de G^* est une fonction impaire alors que la partie réelle de G^* est une fonction paire, l'utilisation d'une transformée de Fourier inverse pour repasser au domaine temporel fournit nécessairement une réponse réelle dans le temps. Nashif et al. présentent des exemples numériques de la méthode en l'appliquant sur un

système à un degré de liberté soumis à une Dirac. Cependant, bien que la méthode semble adéquate pour représenter le comportement viscoélastique transitoire, elle n'est pas généralisée aux systèmes plus complexes (systèmes à plusieurs degrés de liberté ou continus).

En 1999 et en 2000, des études ont été publiées concernant le régime transitoire par éléments finis (Barkanov, 1999; Barkanov et al., 2000). Les auteurs proposèrent une représentation complexe des propriétés du viscoélastique qui varient en fréquence — sans toutefois mentionner si le modèle GHM ou une série de Prony étaient utilisés. À l'instar de ce qu'avaient présenté Nashif et al., la réponse fréquentielle est obtenue puis est retournée dans le domaine temporel par la transformée inverse de Fourier. La caractérisation de l'amortissement de la structure s'effectue dans le domaine temporel en calculant le décrement logarithmique, une fois les modes supérieurs amortis. La méthode est validée sur les résultats théoriques présentés par Nashif et al. pour un système à un seul degré de liberté. Des calculs ont été menés sur certaines structures dont une poutre sandwich excitée par une impulsion rectangulaire. Ces calculs ne sont pas validés avec des données expérimentales. Les réponses temporelles sont montrées, mais aucune analyse n'en est tirée.

Slanik et al. présentèrent en 2000 une étude transitoire par éléments finis à l'aide du logiciel ABAQUS où le comportement viscoélastique était représenté par une série de Prony (Slanik et al., 2000). L'algorithme de Rogers a été utilisé. L'analyse d'une poutre encastree-libre est menée. Elle est couverte de tampons amortissants contraints à une ou plusieurs couches ou encore en démontrant des discontinuités. Les résultats numériques sont comparés à des essais expérimentaux. L'amortissement est caractérisé par le décrement logarithmique.

Maintenant que la revue de la littérature pertinente est complétée, il est possible de dégager les forces et les faiblesses des travaux effectués par différents auteurs. Les objectifs de la présente recherche visent à pallier les lacunes des précédents travaux, notamment en ce qui a trait aux données expérimentales et à l'analyse en régime transitoire. Le chapitre 2 présente ces objectifs de recherche ainsi que la méthodologie employée pour les atteindre.

CHAPITRE 2

DÉMARCHE DE L'ENSEMBLE DU PROJET

À la lumière des différents travaux présentés au chapitre 1, il est possible de dégager certains points importants.

D'abord, notons le manque quasi total de données expérimentales. Comme mentionné, la plupart des auteurs se contentent de valider leur modèle en le comparant à d'autres auteurs qui l'ont eux-mêmes validé à partir de résultats théoriques.

En ce qui concerne le comportement vicoélastique, beaucoup d'auteurs ayant travaillé avec une poutre amortie par tampon amortissant ont utilisé des matériaux dont les propriétés ne varient pas en fonction de la fréquence. De plus, lorsque cette supposition est effectuée, les facteurs de pertes utilisés sont très élevés ce qui ne reflète en rien la réalité viscoélastique.

Certains auteurs ont présenté des méthodes d'optimisation pour l'amortissement des vibrations en régime permanent. Cependant, ces méthodes sont conçues pour amortir un seul mode à la fois. Les auteurs qui ont présenté des paramètres optimaux pour la conception d'un tampon l'ont fait en minimisant les vibrations du premier mode uniquement. On remarque que personne ne s'est attardé à la réduction des vibrations aux modes supérieures.

Enfin, très peu d'études en régime transitoire ont été menées. Parmi les quelques répertoriées, on constate qu'elles sont essentiellement basées sur la méthode

des éléments finis et ne traitent pas de l'effet des traitements contraints sur le tout début du régime transitoire. Les travaux de Nashif et al. (Nashif et al., 1985) sont parmi les seuls à traiter analytiquement le sujet du domaine temporel pour un système composé de viscoélastique. Cependant, ils ne traitent que de systèmes à un seul degré de liberté.

Par conséquent, les objectifs poursuivis dans cette étude sont :

1. de mettre au point un modèle analytique et une méthode de solution permettant d'obtenir le mouvement initial transitoire d'une poutre avec tampon contraint partiel soumis à un impact ;
2. de valider le modèle et la méthode de solution à partir de la littérature et de données expérimentales ;
3. d'étudier l'effet de différents paramètres (longueur du traitement, sa position et l'épaisseur des différentes couches) sur le régime transitoire initial de vibration — c'est-à-dire les premières dizaines de millisecondes — responsable des bruits d'impact.

Pour atteindre ces objectifs, l'approche utilisée est la suivante :

1. Afin de limiter l'étendue de l'étude, les dimensions, le matériau et les conditions aux limites de la poutre de base sont maintenus constants dans tous les essais. La poutre de base est encastree à une extrémité et libre à l'autre extrémité, de façon à pouvoir produire des résultats expérimentaux fiables aux fins de validation du modèle.
2. Les équations du mouvement d'une poutre encastree-libre avec un tampon

partiel contraint seront établies en utilisant la méthode développée par Cai et al. (Cai et al., 2004). Notons que quelques erreurs ont été détectées dans l'ouvrage de Cai et al.. Donc, afin d'assurer une certaine rigueur, les équations du mouvement sont entièrement re-développées à partir des principes de base.

3. Dans le but de représenter de façon réaliste le matériau viscoélastique utilisé, le modèle tient compte de propriétés qui varient en fréquence et qui respectent l'équivalence temps-fréquence. Pour ce faire, le module de cisaillement est obtenu par des essais de relaxation dans le temps et sa représentation fréquentielle est calculée par transformée de Fourier.
4. Pour obtenir la réponse temporelle du système poutre-tampon, le méthode de solution présentée par Nashif et al. (Nashif et al., 1985) est généralisée pour un système à plusieurs degrés de liberté. Ainsi, le système poutre-tampon est discrétisé en utilisant la méthode *Assumed Modes* et la méthode de solution généralisée permet de déterminer la réponse transitoire du système suite à un impact.
5. Une première phase de validation du modèle est faite par la vérification des fréquences naturelles. Le modèle est utilisé pour obtenir la réponse impulsionnelle du système. Les fréquences naturelles du système sont déterminées à partir du spectre de la réponse impulsionnelle, puis elles sont comparées avec les données disponibles dans la littérature. Cette validation est réalisée plusieurs fois, en faisant varier les paramètres des tampons. De plus, un montage expérimental avec une excitation harmonique est utilisé pour obtenir les fréquences naturelles des configurations qui seront étudiées ultérieurement. Les résultats obtenus grâce au modèle analytique sont confrontés aux résultats expérimentaux.

6. Une seconde phase de validation est faite par la vérification de la réponse transitoire, pour diverses configurations de tampons. Le montage expérimental est réutilisé, mais cette fois, la poutre est soumise à un impact contrôlé. La force du contact est mesurée et est injectée dans le modèle analytique. Les déplacements de la poutre calculés grâce au modèle sont comparés à ceux mesurés expérimentalement.
7. Finalement, le modèle analytique est utilisé pour déterminer l'influence des paramètres des tampons sur la réponse transitoire initiale. Des simulations sont effectuées en faisant varier la longueur du traitement, sa position et l'épaisseur des différentes couches. Les déplacements transitoires initiaux sont comparés les uns aux autres de façon à pouvoir conclure sur la capacité des traitements amortissants à réduire la réponse transitoire d'une structure soumise à un impact.

Le chapitre 3 traitera des objectifs 1 et 2 en entier et de l'objectif 3, en partie. La couverture de ce dernier objectif sera complétée au chapitre 4.

CHAPITRE 3

ARTICLE : EFFECTS OF PCLD PARAMETERS ON THE INITIAL TRANSIENT RESPONSE OF IMPACTED CANTILEVER BEAMS : EXPERIMENTAL AND NUMERICAL RESULTS

Ce chapitre présente l'article « *Effects of PCLD parameters on the initial transient response of impacted cantilever beams : Experimental and numerical results* » écrit par D. Granger et A. Ross. Il a été soumis pour publication au *Journal of Sound and Vibration* le 28 novembre 2007.

Cet article constitue une partie importante du travail. D'abord, on y développe le modèle analytique utilisé puis on en présente la validation. Celle-ci est basée sur la littérature existante et sur des données expérimentales. Une fois que la validité est prouvée, certains résultats numériques sont inclus de manière à tirer certaines conclusions quant à l'effet des différents paramètres constituant le tampon amortissant. Bref, cet article satisfait les deux premiers objectifs définis au chapitre 2 et traite en partie du troisième.

3.1 Abstract

The effects of PCLDs on the first few milliseconds of the transient vibration of an impacted beam is studied using an analytical model. The viscoelastic properties of the core are frequency dependent and the shear modulus is modelled using a

Prony Series. The equations of motion (EOM) of the system are obtained using Lagrange's equations. The EOM are converted in the frequency domain using a Fourier Transform and they are solved for frequency displacements using the assumed modes method. They are then converted back in the time domain using an inverse Fourier Transform. The technique is validated for natural frequencies and for transient responses using experimental impact for signals. The numerical results are in good agreement both with open literature and experimental data. Four PCLD parameters are studied : the length, the placement, the viscoelastic layer thickness and the constraining layer thickness. It turns out that the length of the PCLD has the most important effect on the initial transient displacement while the viscoelastic layer thickness has little effect. Non causal effects in the model are discussed and are mainly induced when the PCLD treatment is poorly effective.

3.2 Introduction

Unwanted vibrations may be a source of many problems. For instance, the riveting process used in aircraft assembly necessarily induces strong impacts on structures. These impacts are likely to produce transient vibrations which are responsible for making powerful noise. This is specially true for large and flexible structures that may experience severe acoustical radiation. This may cause work-related injuries, even when workers benefit from auditory protection equipment. Hence, it is important to develop a damping treatment which would effectively reduce transient vibrations due to impact processes.

An ingenious way to do so is to apply on the surface of the structure a viscoelastic

layer covered by another elastic layer. The elastic layer is called the constraining layer and causes the viscoelastic material to experience shear deformation which optimizes the energy dissipation in this layer. This kind of passive treatment is called Constrained Layer Damping (CLD). However, in order to limit added mass and for costs considerations, damping treatments covering an entire structure (CLD) have been replaced by partial constrained viscoelastic layer damping (PCLD). Moreover, it was shown that CLDs are not necessarily more efficient than PCLDs (Marcelin et al., 1992). From a practical point of view, PCLDs can either be applied to existing structures or be part of the design process.

This paper deals with the effects of PCLDs on the transient response of impacted beams. There are good reasons to study beams. For instance, the behavior of beams is mathematically well known. They have been studied for a long time and they are the first step to understand the behavior of more complex structures. Also, it is easy to verify theoretical results by means of experiments.

The harmonic behavior of CLDs and PCLDs has been studied using analytical models by many authors. Mead and Markus proposed a model for a sandwich beam where the core layer was made of viscoelastic (Mead and Markus, 1969). They stated assumptions which have been used in many subsequent works (e.g. (Lall et al., 1988; Kung and Singh, 1998; Kung and Singh, 1999)). Kung and Singh are among the few authors who presented experimental data (Kung and Singh, 1998; Kung and Singh, 1999). Huang, Inman and Austin proposed the use of the Lagrange's equations to derive the equation of motion of a base beam damped by a viscoelastic partial treatment (Huang et al., 1996). They applied the assumed modes method to discretize and solve the equation. Cai, Zheng and Liu also used

the Lagrange's equations, but instead of deriving the longitudinal motion of the constraining layer using force and moment balances, they proposed to use a third set of admissible functions (Cai et al., 2004).

Design considerations of PCLD treatments exist for steady-state harmonic motion only. Optimal patch design parameters were studied for the first mode of cantilever beams (Yaman, 2005) or the first two modes (Marcelin et al., 1992). Kung and Singh proposed an analytical design procedure for PCLD treatment applied to a single mode at a time (Kung and Singh, 1999). In all cases, the criterion used for optimal damping was a maximum modal loss factor.

Few transient analyses of viscoelastically damped structures have been conducted so far. Nashif, Jones and Henderson proposed a method to study single degree of freedom systems submitted to a Dirac impulse (Nashif et al., 1985). The equation of motion is converted to the frequency domain using a Fourier Transform and is solved for frequency displacements. Then, the displacement is converted back into the time domain using an Inverse Fourier Transform.

However, time analyses have been conducted more often using finite element methods (FEM) rather than analytical models. CLD (Barkanov, 1999; Barkanov et al., 2000) and PCLD (Slanik et al., 2000) treated cantilever beams were studied, but only the damping of the first mode was analysed using the logarithmic decrement once the forced transient response was passed and all higher modes were damped. Some of the results were compared to experiments (Slanik et al., 2000).

In view of these works, some conclusions may be drawn. Many authors studied beams damped with PCLD treatments using analytical models. In particular, the

work done by Cai et al. effectively combines the energy approach and a discretization technique to get the equations of motion of the system leading to a common form which is easily solvable (Cai et al., 2004). However, much of the work was done for harmonic or steady-state response. Finite element models are proposed in the literature to understand the time response over a long period whereas impact noises are partly due to the initial transient motion. Though some experiments are proposed to validate the natural frequencies of systems with PCLDs and their steady-state time response, there is a clear lack of experimental data concerning the initial forced transient response.

Finally, the viscoelastic shear properties are frequency dependent (Pritz, 1998). Even if frequency independent properties have been used in the past (e.g. (Cai et al., 2004; Rikards and Barkanov, 1992)), this assumption received many critics because it leads to unrealistic material properties that produce inaccurate frequency peaks and non causal response (Nashif et al., 1985; Chen et al., 2004). Moreover, the complex modulus approach is based on the assumption of cyclic motion (Wang and Wereley, 2002; Moreira and Dias Rodrigues, 2006; Vasques et al., 2006), hence it is only valid for transient response calculations if the material shear modulus has a real time domain behavior (Pritz, 1998). To do so, two models are widely used : the GHM model (McTavish and Hughes, 1993; Friswell et al., 1997) and the Prony Series (Rogers, 1984; Chen, 2000). Both representations ensure frequency dependence of materials and accurate behavior representation in the time domain.

This paper has four goals. (1) To obtain the equations of motion of a beam with a PCLD using the method proposed by Cai et al. (Cai et al., 2004). However, a Prony Series is used to make sure the viscoelastic behavior will be well suited both in the

frequency and time domains. (2) To generalize the method proposed by Nashif et al. (Nashif et al., 1985) for solving the equations of motion and to obtain the time response of the system submitted to a real impact. (3) To validate the natural frequencies and time responses through open literature and experimental results. (4) To study the effects of a PCLD on the first few milliseconds of the transient displacement, which is responsible for initial transient impact noise.

3.3 Model

3.3.1 Geometry and displacements

The system is an impacted beam which is damped by a partial viscoelastic constrained layer (Fig. 3.1). The base beam has a length L and arbitrary boundary conditions. In the present model, the base beam is cantilevered. The damping treatment is composed of two layers and is installed from x_1 to x_2 , where x is the axial coordinate of the beam. Each layer has a thickness h_β and a density ρ_β where $\beta = b, v$ or c , respectively for the base beam, the viscoelastic layer and the constraining layer. The system has a uniform width B . The force is applied at x_f , and x_0 indicates the location where the response of the system is measured (not shown in Fig. 3.1). Prior to developing the model, some assumptions were made. They were taken directly from Mead and Markus (Mead and Markus, 1969) and are commonly accepted in the open literature.

1. All displacements are small and occur in the xz plane.
2. The base beam and the constraining layer are considered purely elastic. Mo-

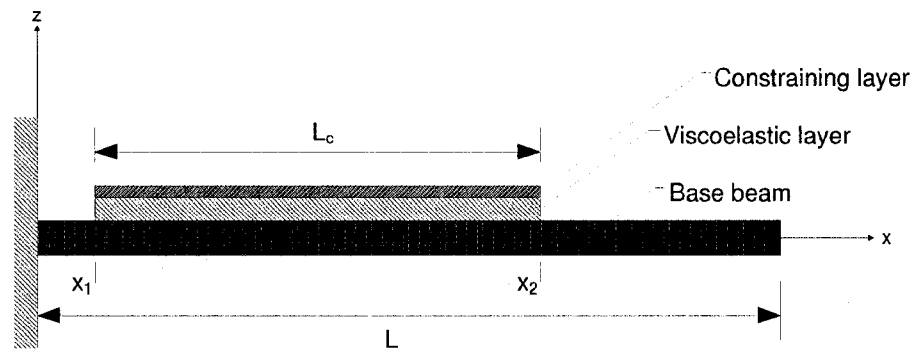


Figure 3.1 – Partial constrained viscoelastic layer damping applied to a base beam

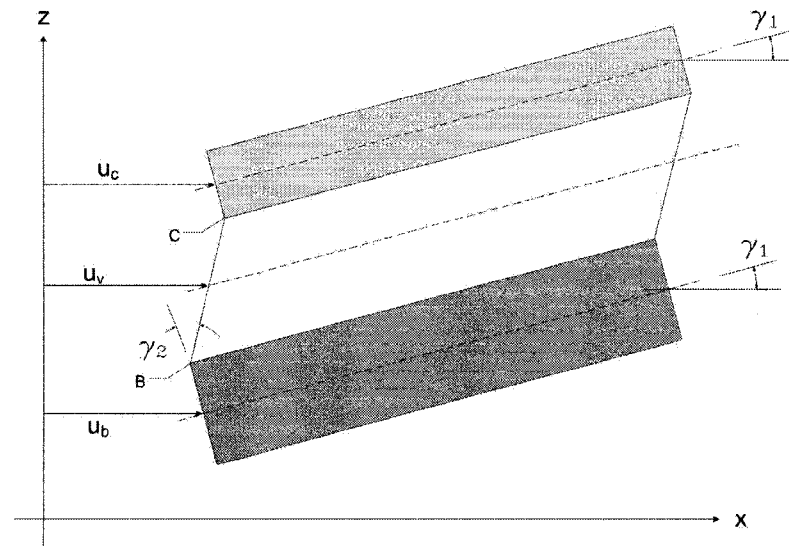


Figure 3.2 – Deformed element with displacements

reover, these two layers are only allowed to experience flexural and axial deformations. No shear deformation is taken into account ; neither is the rotational inertia.

3. The central layer is a viscoelastic that can deform linearly. It can experience axial and transverse displacements. Shear deformation occurs in the xz plane only while the axial, compressive and tensial constraints in this layer are neglected due to the fact that the Young's modulus of the viscoelastic is very small as compared to the Young's moduli of the base beam and the constraining layer.
4. As stated in Assumption 3, the viscoelastic has a fixed thickness so that, for a given position x , the transverse displacement in the z direction is the same for the three layers.
5. In the frequency domain, the viscoelastic shear modulus is described using a complex function :

$$G^*(\omega) = G_s(\omega)[1 + j\eta(\omega)], \quad (3.1)$$

$$\eta(\omega) = \frac{G_l(\omega)}{G_s(\omega)}, \quad (3.2)$$

where $G_s(\omega)$ and $G_l(\omega)$ are the storage and loss moduli respectively, $\eta(\omega)$ is the loss factor and ω is the circular frequency. It is important to note that the moduli and loss factor are frequency dependent, as shown in Eqs. (3.1) and (3.2).

The system displacements are defined as follow :

1. $w(x, t)$ is the transverse displacement of the system along the z axis

2. $u_b(x, t)$ is the longitudinal displacement of the base beam along the x axis
3. $u_c(x, t)$ is the longitudinal displacement of the constraining layer along the x axis

Here, u_c and u_b are independent from one another as stated by Cai et al. (Cai et al., 2004). Fig. 3.2 represents a small element of the system where γ_1 is the angle of the neutral axis of the base and constraining layers with respect to the x -axis, and γ_2 accounts for the shear deformation of the viscoelastic layer.

Noting that for small angles, $\sin(\gamma) \approx \gamma$, and also that $\gamma_1 \simeq \partial w / \partial x$, it can be shown that

$$\gamma_2 = \frac{u_c - u_b}{h_v} + \frac{1}{h_v} \left(h_v + \frac{h_c}{2} + \frac{h_b}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (3.3)$$

Combining the three independent displacements $w(x, t)$, $u_b(x, t)$, $u_c(x, t)$ and Eq. (3.3), it is possible to define all the deformations involved in the model.

3.3.2 Energies

We will now analyze the various sources of kinetic and potential energies in the system.

Potential energy in the viscoelastic layer. As stated before, the central layer is made of a viscoelastic material characterized by a complex rigidity G^* . It is assumed that this layer is a shear deformable body so that the potential energy involved can only arise from shear in the xz -plane. This deformation is noted as γ_2

and is defined by Eq. (3.3). The potential energy is then

$$V_v = \frac{1}{2} G^* h_v B \int_{x_1}^{x_2} \gamma_2^2 dx. \quad (3.4)$$

Potential energy in the elastic beams. Both the base beam and the constraining layer are elastic beams experiencing flexural and longitudinal motions. In such beam, the potential energy due to both deformations is (Baruh, 1998) :

$$V_\alpha = \frac{E_\alpha B h_\alpha}{2} \int_{L_\alpha} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{E_\alpha I_\alpha}{2} \int_{L_\alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad \alpha \equiv b, c, \quad (3.5)$$

where b and c represent the base beam and the constraining layer respectively ; E_α is the Young's modulus and I_α is the second moment of the section which, for a rectangular section, is $B h_\alpha^3/12$. The integral limits L_α represent the length of the layer along the x -axis.

The total energy of deformation is given by

$$V = V_v + V_b + V_c. \quad (3.6)$$

Kinetic energy. The kinetic energy of each layer will be mainly composed of the transverse motion along the z -axis. The longitudinal and rotational kinetic energy will be neglected. Also, it will be assumed that all points on a cross section of the beam have the same velocity. The expression will then be

$$T = T_v + T_b + T_c, \quad (3.7)$$

where

$$T_\beta = \frac{1}{2} \rho_\beta h_\beta B \int_{L_\beta} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx, \quad \beta \equiv b, c, v.$$

3.3.3 Discretization

We now chose a way to discretize the continuous system in order to go on with the derivation of the equation of motion. The assumed modes method is used (Huang et al., 1996; Baruh, 1998). This method allows us to write the three independent displacements defined earlier as functions of time and position. So, using vector notation (where the length of the vectors is the number of modes used)¹ :

$$w(x, t) = \sum_i^{n_w} W_i(x) \psi_i(t) = \mathbf{W}^T \boldsymbol{\psi}, \quad (3.8)$$

$$u_b(x, t) = \sum_j^{n_b} U_{b,j}(x) \xi_{b,j}(t) = \mathbf{U}_b^T \boldsymbol{\xi}_b, \quad (3.9)$$

$$u_c(x, t) = \sum_k^{n_c} U_{c,k}(x) \xi_{c,k}(t) = \mathbf{U}_c^T \boldsymbol{\xi}_c, \quad (3.10)$$

where $W(x)$, $U_b(x)$ and $U_c(x)$ are the admissible functions, $\boldsymbol{\psi}(t)$, $\boldsymbol{\xi}_b(t)$ and $\boldsymbol{\xi}_c(t)$ are the new generalized coordinates and n_w , n_b and n_c are the number of modes used respectively for the transverse motion of the system, the longitudinal motion of the base beam and the longitudinal motion of the constraining layer. The use of a third set of admissible functions to represent the longitudinal displacement u_c was introduced by Cai et al. (Cai et al., 2004). If $n \rightarrow \infty$ for each of the different displacements, the response is considered to be *exact*.

Admissible functions have to satisfy all geometric boundary conditions. Even

¹Vectors are bold typewritten — \mathbf{W} instead of \vec{W}

though many arbitrary functions could do so, it is convenient to use classical mode shapes. In the present model, the mode shapes of a cantilever beam are used for $w(x, t)$ and $u_b(x, t)$, and the mode shapes of a free beam are used for $u_c(x, t)$, as given in 3.7

Now that the three independent displacements have been discretized, it is possible to reformulate the potential and kinetic energies developed above. Inserting Eqs. (3.8) to (3.10) into Eqs. (3.4) to (3.7) leads to :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\psi}}^T \left[[M_b] + [M_v] + [M_c] \right] \dot{\boldsymbol{\psi}}, \quad (3.11)$$

$$V_\alpha = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}_\alpha^T [K_{\alpha,1}] \boldsymbol{\xi}_\alpha + \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}^T [K_{\alpha,2}] \boldsymbol{\psi}, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} V_v = & \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}_c^T [K_{v,1}] \boldsymbol{\xi}_c - \boldsymbol{\xi}_c^T [K_{v,2}] \boldsymbol{\xi}_b + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}_b^T [K_{v,3}] \boldsymbol{\xi}_b \\ & + \boldsymbol{\xi}_c^T [K_{v,4}] \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\xi}_b^T [K_{v,5}] \boldsymbol{\psi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}^T [K_{v,6}] \boldsymbol{\psi}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

where α stands again for b and c and submatrices are presented in 3.8

It should be noted that the values of submatrices $[K_{v,1}]$ to $[K_{v,6}]$ are complex, where the imaginary part accounts for viscoelastic shear dissipation.

3.3.4 Equations of motion

The discretization process produced a $N_{dof} = n_w + n_b + n_c$ degrees of freedom system. Since the energies are now expressed in terms of finite sets of generalized coordinates (Eqs. (3.11) to (3.13)), the Lagrange's equations constitute a good way

to obtain the equations of motion :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = Q_r, \quad (3.14)$$

where $r = 1, 2, \dots, N_{dof}$, $L = T - V$ is the Lagrangian and Q_r represents the generalized forces. Using the vector notation introduced above, we get the next three sets of equations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= Q_\psi, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_b} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_b} &= Q_{\xi_b}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_c} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_c} &= Q_{\xi_c}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Again, because the dissipative characteristics of the system are contained in the potential energy term — and in the Lagrangian — the Rayleigh dissipation function does not appear in Eq. (3.15). The external force is applied locally on the base beam, along the z -axis. It is a function of the x -position and of time and is identified as $f(x, t) = \delta(x - x_f)f(t)$. The virtual work of this force is

$$\delta W = \sum_i^{n_w} \delta \psi_i(t) \int_0^L f(t) \delta(x - x_f) W_i(x) dx, \quad (3.16)$$

where $Q_{\psi i} = \int_0^L f(t) \delta(x - x_f) W_i(x) dx$ is the i^{th} generalized force, so that

$$Q_\psi = f(t) \mathbf{W}(x = x_f). \quad (3.17)$$

Vectors Q_{ξ_b} and Q_{ξ_c} are both null. In their work, Cai et al. used a harmonic force to obtain the frequency response of the system (Cai et al., 2004). This is not the

case in the present work. Instead, a Dirac function $\delta(t)$ is used which leads to the impulse response. This way, the natural frequencies of the system can be found. This approach is privileged because it is closer to the field of applications we intend to analyze.

From Eq. (3.15), we obtain the equations of motion of the entire system :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_\psi \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [M_b + M_c + M_v] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\xi}_b \\ \ddot{\xi}_c \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} [K_{b,2} + K_{c,2} + K_{v,6}] & -[K_{v,5}]^T & [K_{v,4}]^T \\ -[K_{v,5}] & [K_{b,1} + K_{v,3}] & -[K_{v,2}]^T \\ [K_{v,4}] & -[K_{v,2}] & [K_{c,1} + K_{v,1}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi \\ \xi_b \\ \xi_c \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.3.5 Solving for transient response

In order to carry out a transient analysis of the system resulting from a general impact excitation, a solution for Eq. (3.18) in time domain is sought. However, as discussed previously, most rigidity terms in Eq. (3.13) are better represented in the frequency domain. It is therefore proposed to solve Eq. (3.18) in the frequency domain by means of Fourier transform, and to convert the solution back in the time domain. To do so, the method presented by Nashif et al. (Nashif et al., 1985) for a simple degree of freedom system excited by a Dirac impulse is now extended and applied to the N_{dof} degrees of freedom system². Applying a Fourier transform

²Note ne faisant pas partie de l'article : Davantage de détails sur cette procédure sont présentés à l'annexe II.

to Eq. (3.18) leads to the well known form

$$([K] - \omega^2[M]) \begin{Bmatrix} \overline{\psi} \\ \overline{\xi_b} \\ \overline{\xi_c} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{Q_\psi} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (3.19)$$

where the overline symbol indicates a Fourier-transformed term which is a function of frequency (ω). The generalized stiffness matrix $[K]$ contains frequency dependent parameters representing the viscoelastic rigidity (G^*) as discussed above.

Using a Dirac impulse in Eq. (3.17), that is $f(t) = \delta(t)$, and solving for the generalized coordinates displacements, we have

$$\begin{Bmatrix} \underline{\psi} \\ \underline{\xi_b} \\ \underline{\xi_c} \end{Bmatrix} = ([K] - \omega^2[M])^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{W}(x = x_f) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (3.20)$$

where the under tilde notation indicates the impulse response.

It is important to note that in the frequency domain, the real part of G^* (the storage modulus) is an even function while the imaginary part (the loss modulus) is an odd function (Nashif et al., 1985; Pritz, 1998). This is a consequence of adequately representing the behavior of a viscoelastic material. That information is the key part of the method, because it turns out that each of the generalized coordinates frequency response are composed of an even real part and of an odd imaginary part. Consequently, applying an inverse Fourier transform to Eq. (3.20), results in a real time domain vector $[\underline{\psi} \quad \underline{\xi_b} \quad \underline{\xi_c}]^T$.

Inserting $\underline{\psi}$ in Eq. (3.8) leads to the transverse impulse response $w(x, t)$. The response of the system to a general transverse impact loading $h(t)$ is then obtained using a convolution $w(x, t) = w(x, t) * h(t)$.

However, getting $w(x, t)$ is more straightforward if the convolution theorem is used. That way, the generalized coordinate displacements are given by

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \psi \\ \xi_b \\ \xi_c \end{Bmatrix} &= \mathcal{F}^{-1} \left(\begin{Bmatrix} \underline{\psi} \\ \underline{\xi}_b \\ \underline{\xi}_c \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left(\left([K] - \omega^2 [M] \right)^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{W}(x = x_f) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

where \mathcal{F}^{-1} is the inverse Fourier transform operator and (\cdot) is a point-wise multiplication. Inserting Eq. (3.21) in Eq. (3.8) leads to $w(x, t)$. Numerically, this approach is less time consuming than using a convolution.

3.3.6 Numerical computations

Based on the information carried out in the preceding section, it is possible to compute the transverse response $w(x, t)$ of the system submitted to a general impact. To do so, the following steps were implemented using *Matlab*³ :

³Note ne faisant pas partie de l'article : L'annexe II présente le code *Matlab* utilisé pour obtenir les résultats numériques.

1. The desired time increment Δt and the number of points of the simulation N are fixed so that the total simulation time is $T_{max} = N\Delta t$.
2. According to the sampling theorem, the sampling frequency is given by $f_s = 1/\Delta t$ which has to be at least twice the maximum frequency (in Hz) of the signal in order to respect the Nyquist frequency. That is, for the maximum circular frequency $\Omega = \pi f_s$.
3. The frequency domain $[-\Omega, \Omega]$ is discretized using $\Delta\omega = 2\pi/T_{max}$.
4. The forcing function $h(t)$ is Fourier transformed using FFT and \bar{h} is inserted in Eq. (3.21).
5. For any given value of ω over the frequency domain, the mass and stiffness matrices are wholly determined in Eq. (3.21). The generalized coordinates displacement vector is found by means of linear algebra and IFFT computations.
6. Eq. (3.8) is applied. The result represents the transverse time response of the system to a general impulse with a time increment Δt .

3.3.7 Viscoelastic properties

To ensure an accurate representation of the core layer both in the frequency and time domains, viscoelastic properties are accounted for using Prony Series representation with N_p terms. Hence, in the frequency domain

$$G^* = G_0 - G_0 \sum_{n=1}^{N_p} g_n + \sum_{n=1}^{N_p} \frac{G_0 g_n \tau_n j \omega}{1 + \tau_n j \omega}, \quad (3.22)$$

where τ_n and g_n are the material specific parameters and $G_0 = G(t = 0)$ is the instantaneous relaxation modulus. These parameters are obtained by using stress relaxation tests. Recalling that $G_s = \Re(G^*)$ and $G_l = \Im(G^*)$, we get the same form as expected from Eq. (3.1).

3.4 Model validation

The solution method developed in Section 3.3 to obtain the natural frequencies and the time domain analysis is now validated using both open literature and an experimental setup.

3.4.1 Literature validation

Kung and Singh were among the few authors who published experimental results to validate their analytical model (Kung and Singh, 1998). To do so, they proposed two different PCLD configurations installed on a cantilever base beam and for which different viscoelastic materials were used. The treatments are labelled Patch A and Patch B. Properties of these treatments are defined in Tables 3.1 and 3.2, where $L = 177.8$ mm is the length of the base beam. The loss factors used are shown in Fig. 3.3.

The first five natural frequencies are found for the two patches and the results — both from the experiments and the model — are presented in Table 3.3 where they are compared to the present model. We set the number of modes to $n_w = 20$ and $n_b = n_c = 10$. The Dirac impulse is applied at $x_f = L$ and the impulse response is

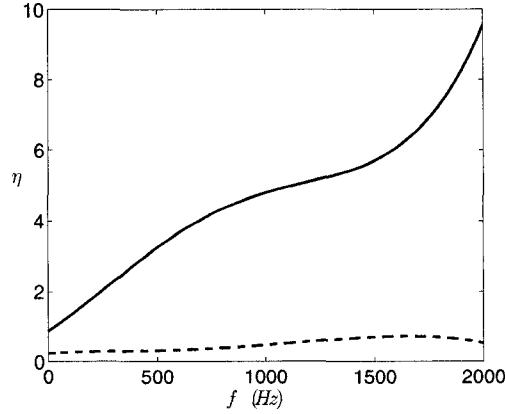


Figure 3.3 – Viscoelastic loss factors for PCLDs A (—) and B (---) from Kung and Singh (Kung and Singh, 1998)

Tableau 3.1 – Constant properties of the different layers for the experimental setup of Kung and Singh (Kung and Singh, 1998)

Layer	Thickness (mm)	Density (kg/m^3)	Young's modulus (GPa)
Base	$8.29 \cdot 10^{-3} \cdot L$	7350	180
Constraining	$4.43 \cdot 10^{-3} \cdot L$	7720	180
Viscoelastic	$2.86 \cdot 10^{-4} \cdot L$	2000	N/A

measured at $x_0 = L$.

The results of the model we are using are in very good agreement both with the experimental and the theoretical values presented by Kung and Singh. When Patch A is applied, each natural frequency obtained falls between the experimental values (lower) and the Kung and Singh theoretical values (higher), though they are much closer to the theoretical values. When Patch B is applied, a similar behavior is

Tableau 3.2 – Properties of patches A and B used in the experimental setup of Kung and Singh (Kung and Singh, 1998)

Patch	G (MPa)	L_c (mm)	x_1 (mm)	x_2 (mm)
A	$0.25 \cdot [1 + j\eta_A]$	$0.14 \cdot L$	$0.13 \cdot L$	$0.27 \cdot L$
B	$3.00 \cdot [1 + j\eta_B]$	$0.22 \cdot L$	$0.59 \cdot L$	$0.81 \cdot L$

Tableau 3.3 – Comparison of the natural frequencies (rad/s) obtained experimentally and analytically by Kung and Singh (Kung and Singh, 1998), and numerically using the presented model. Numbers in parenthesis are the relative errors as compared to experimental data.

Patch	Mode	Kung and Singh (Exp)	Kung and Singh	Presented
A	1	37.15	38.21 (2.86)	38.04 (2.39)
	2	228.23	230.35 (0.93)	229.98 (0.77)
	3	617.81	625.24 (1.20)	624.40 (1.07)
	4	1206.95	1221.81 (1.23)	1219.60 (1.05)
	5	2006.28	2054.05 (2.38)	2048.90 (2.12)
B	1	32.91	36.09 (9.68)	35.58 (8.12)
	2	233.53	233.53 (0.00)	233.70 (0.07)
	3	654.96	650.71 (-0.65)	650.63 (-0.66)
	4	1250.47	1266.40 (1.27)	1264.17 (1.10)
	5	1996.72	2072.09 (3.77)	2068.06 (3.57)

observed, except for modes 2 and 3. In mode 2, Kung and Singh proposed two identical values while the presented value is slightly higher. For mode 3, theoretical values from both models underestimate the experimental value. Globally the presented model leads to good results when compared to another theoretical model and reported experimental data.

However, the Kung and Singh experimental setup shows some limitations. First, the viscoelastic layer used was very thin (in comparison to the length of the beam, $h_v \approx 0.05$ mm). Also, as compared to other layers, this thickness is about 3.5% of the base beam and 6.5% of the constraining layer. Second, as shown in Fig. 3.3, the viscoelastic material loss factors are frequency dependent. In the frequency domain shown, η_B varies between 0.24 and 0.73, which are common values for viscoelastic materials. However, η_A has an initial value slightly below 1 and rapidly increases up to 9.5. This is quite a large value which might be explained by the fact that material A is very soft ($G_s = 0.25$ MPa) while material B is relatively stiff and

represents common viscoelastics more adequately. Finally, both patches A and B are relatively short treatments ($L_c \lesssim L/5$).

3.4.2 Experimental setup

To further validate the actual model, experiments were carried out to obtain the natural frequencies and transient response of a beam with a wide selection of PCLDs. The new experimental data complements the ones presently available in the literature.

Overall, 15 cantilever beams with different PCLDs were tested. For each configuration, the base beam length and the damping treatment characteristics are listed in Table 3.4. Material properties are shown in Tables 3.5 and 3.6. All layers have a 25.4 mm width. Both the base beam and the viscoelastic layer are 3.175 mm thick while the constraining layer is 1.587 mm thick. These are much thicker values than those used by Kung and Singh in their experiments. The objective is to show the validity of the method for PCLD geometry which could be used in real applications. The layers were bonded together using *Loctite*. The viscoelastic material was the *Urethane CPA-850* from *Rhino Hyde Products*.

The system was submitted to a frequency sweep test. An electromagnet exciter was used to force the harmonic transverse motion of the beam. The system response was then observed by a *Bently Nevada Proximity Transducer System (3300 XL 8 mm)*. Resonant frequencies were identified by detecting the largest amplitude responses. For each configuration, the first three natural frequencies were established. They are shown in Table 3.7 and they are compared to the present model. For the numerical

Tableau 3.4 – Beam specimens. All dimensions in mm.

Beam	L	L_c	x_1	x_2	Beam	L	L_c	x_1	x_2
I	508	375	15	390	VIII	508	76	165	241
II	511	375	68	443	IX	507	76	215	291
III	510	250	78	328	X	507	76	269	345
IV	507	125	140	265	XI	508	76	321	397
V	508	125	195	320	XII	509	26	191	217
VI	508	125	242	367	XIII	510	26	243	269
VII	506	125	297	422	XIV	510	26	297	323
					XV	510	26	345	371

Tableau 3.5 – Physical properties of materials.

Layer	Material	ρ (kg/m^3)	E	G_0
Base, Constraint	Aluminum 3003	2710	70 GPa	—
Viscoelastic	Urethan CPA-850	1124	—	14.1 MPa

Tableau 3.6 – Prony Series parameters of the viscoelastic layer

n	g	τ
1	0.2	0.007
2	0.63	0.07

Tableau 3.7 – Natural Frequencies in Hz for Different Beam Specimens Using Experimental Setup (Exp) and the Present Model (Model)

Beam	Mode 1		Mode 2		Mode 3	
	Exp	Model	Exp	Model	Exp	Model
I	12.38	13.70	97.50	97.72	200.50	201.33
II	10.19	10.03	108.60	105.84	224.50	228.23
III	11.20	11.14	74.40	74.01	186.50	185.25
IV	10.28	10.35	60.44	60.40	173.50	172.93
V	9.83	9.78	62.85	62.87	171.70	171.25
VI	9.35	9.39	63.81	64.38	178.50	179.21
VII	8.80	8.85	64.95	65.25	190.50	190.40
VIII	10.17	10.19	59.33	60.00	172.92	170.46
IX	9.92	9.87	60.18	60.00	176.58	175.03
X	9.53	9.62	61.45	61.98	174.20	175.00
XI	9.19	9.23	63.19	63.58	173.12	174.36
XII	10.17	10.03	61.32	60.96	174.90	173.32
XIII	10.12	9.95	61.36	60.64	178.57	175.95
XIV	9.87	9.87	61.79	61.52	174.31	173.16
XV	9.77	9.71	63.15	62.55	172.55	171.41

computation, forcing took place at $x_f = 0.04$ m, as for the experimental setup and the impulse response was recorded at $x_0 = L$. The numbers of modes used were $n_w = 20$ and $n_b = n_c = 10$. The natural frequencies are shown to be in very good agreement for all beams and modes : the highest differences between the theoretical and the experimental values are 1.3 Hz, 2.8 Hz and 3.7 Hz for modes 1, 2 and 3 respectively. As a comparison, the three first natural frequencies of a 0.51 meter long unpadded beam are 10.0 Hz, 62.8 Hz and 175.9 Hz.

A large range of different patch configurations were studied. It is shown that the presented model is suitable to predict the natural frequencies of beams with different PCLD treatments.

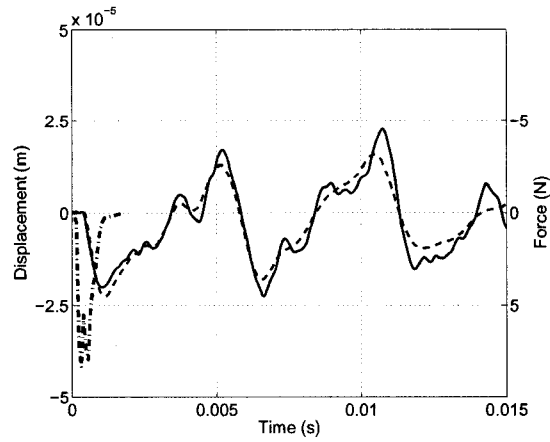
3.4.3 Transient response validation

The previous setup is now used to obtain the transient time response resulting from an impact. To do so, the system is excited using an impact hammer at a constant position $x_f = 0.04$ m and the response is recorded at different locations x_0 . The first few milliseconds of the time responses are shown as a dashed line in Figs. 3.4 to 3.7. The impact force induced by the hammer was recorded so that the real force signal could be employed in the theoretical computations. The force signals are shown in Figs. 3.4 to 3.7 as thick dash-dot lines. Each impact lasted for approximately 1 ms with a maximum amplitude between 7 and 9 N.

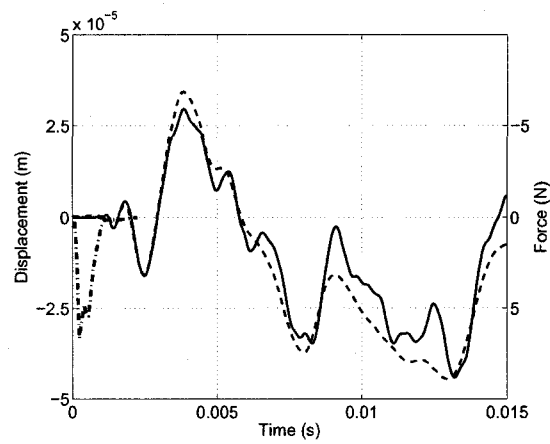
Beams III, V, VI and X were tested experimentally. They represented three different PCLD lengths (Beams III, Beams V and VI and Beam X are 250, 125 and 76 mm long, respectively) and different PCLD positions for a given L_c (for Beams V and VI, they are located at $x_1 = 140$ and 195 mm respectively). The number of modes used in the numerical computations were $n_w = 20$ and $n_b = n_c = 10$. The time simulations were obtained by fixing $\Delta t = 50 \cdot 10^{-6}$ s and using $N = 2^{19}$ points. The numerical results are shown in Figs. 3.4 to 3.7 as solid lines.

In Figs. 3.4 to 3.7, each pair of frames (a) and (b) represents the response of a single beam configuration, measured at two different locations.

1. The transverse motions are in very good agreement with experimental data for all cases (for different observation points, patch lengths and patch positions).
2. In Fig. 3.4a, the response is measured close to the impact location and starts

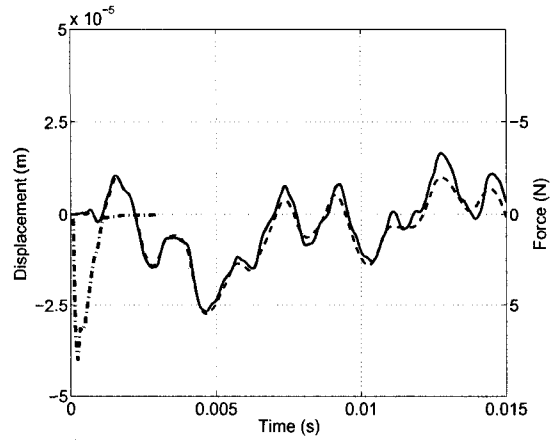


(a)

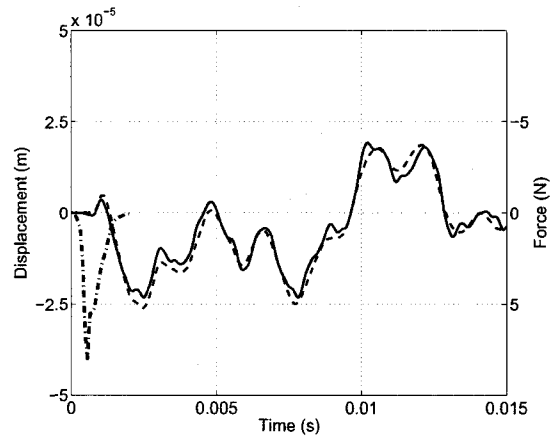


(b)

Figure 3.4 – Transient response of Beam III (Experimental : ---, Theoretical : —) and impact loading (— · —). (a) $x_0 = 0.1$ (b) $x_0 = L$.

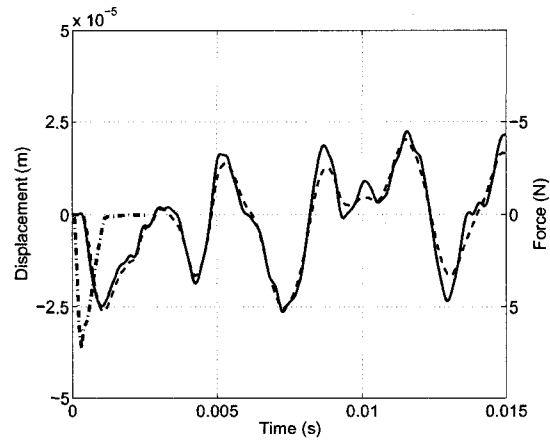


(a)

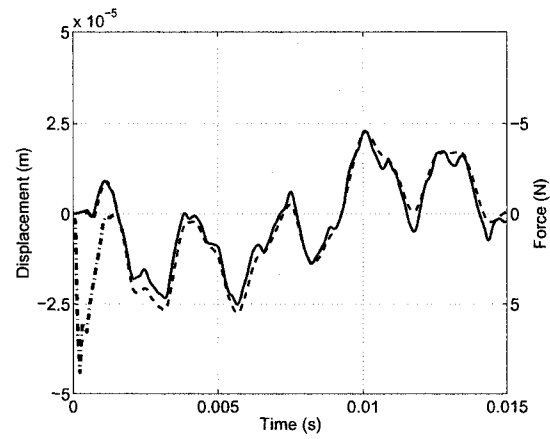


(b)

Figure 3.5 – Transient response of Beam V (Experimental : ---, Theoretical : —) and impact loading (— · —). (a) $x_0 = 0.3$ (b) $x_0 = 0.2$

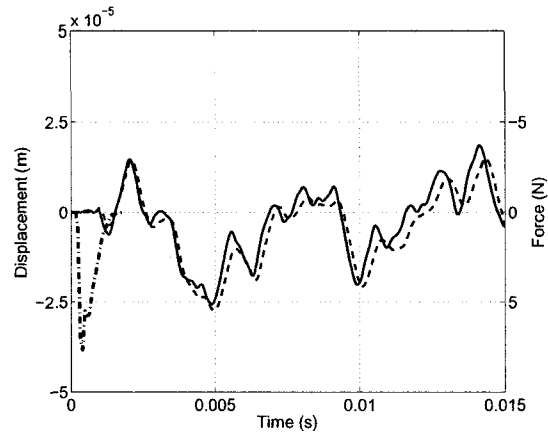


(a)

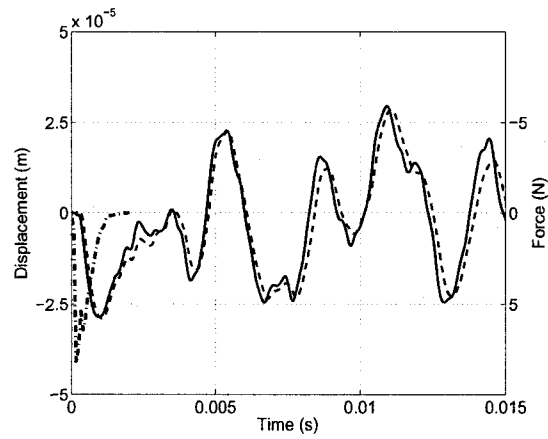


(b)

Figure 3.6 – Transient response of Beam VI (Experimental : ---, Theoretical : —) and impact loading (— · —). (a) $x_0 = 0.1$ (b) $x_0 = 0.25$



(a)



(b)

Figure 3.7 – Transient response of Beam X (Experimental : ---, Theoretical : —) and impact loading (— · —). (a) $x_0 = 0.1$ (b) $x_0 = 0.335$

quickly after the beginning of the contact. On the opposite, in Fig. 3.4b, the response is measured at the free end and the motion is delayed with respect to the impact. Hence, wave propagation is well represented by the model since the time delay of the motion is respected between two positions.

3. The numbers of modes used seem to depict the transverse motion quite satisfactorily.

Thus, the model is good to predict the transient transverse motion of the system for different PCLD lengths and positions. Slight differences between the experimental and theoretical data may be explained by various factors. First, the impact locus in the theoretical model is a point while in the experiment, this locus is a small surface due to the impact hammer head shape. Also, the load applied in the numerical computations is perfectly perpendicular to the system. However, in the setup, it was not possible to perfectly control its direction. This may have produced oblique impacts instead of direct impacts. Finally, from a design point of view, contact imperfections between layers could have occurred so that the assumption stating that bonding layers are not considered since they have no thickness might have been violated in the experimental setup.

It has been shown both from the literature and from experimental data that the present model and solution method are well suited to predict transient motions of beams with PCLD treatments.

3.5 Numerical results

The main advantage of having an accurate and validated numerical model is that it is possible to conduct many tests without an experimental setup. System parameters can be easily modified and their effect on the general response is quickly known. In our case, each simulation took about 230 seconds using a 2.66 GHz dual core Intel processor and 3.25 Go of RAM. Some numerical results are now presented.

3.5.1 Geometric and physical parameters of the system

We simulated an aluminum cantilever beam ($L = 0.5$ m, $h_b = 3.175$ mm, $B = 25.4$ mm) with one PCLD. The system parameters were the length (L_c) and the position (x_1) of the PCLD, the viscoelastic layer and the constraining layer thickness (h_v and h_c). We used the same materials as we did for the experimental validation. The physical properties of each layer are shown in Table 3.5 and the Prony Series values for the viscoelastic are presented in Table 3.6.

3.5.2 Impact load and numerical parameters

The impacts recorded in Section 3.4 varied somewhat in the experiments. However, as shown in Fig. 3.8, if the force is normalized according to its maximum value, the different shapes are quite similar : a quick increase up to a maximum value and a slower decrease until the force disappears. Therefore, the PCLDs have little influence on the shape of the force signal. In order to use the same theoretical force

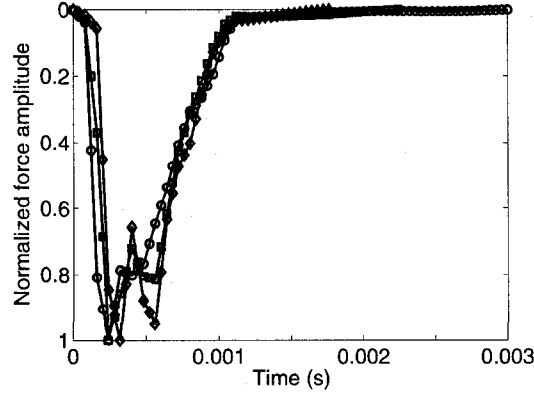


Figure 3.8 – Comparison of experimental impact forces. Beam III, $x_0 = L$ (\diamond). Beam III, $x_0 = 0.1$ (\square). Beam V, $x_0 = 0.3$ (\circ).

for all numerical examples, the impact load was defined as (Heitkämper, 1985)

$$F(t) = F_0 \left(\left(\frac{1.1}{1 + \Lambda + 2\Lambda^2} \right) \cdot \sin \left[(0.97T)^{1.5} \right] e^{(-0.4T)^4} + \left[\frac{1 + 2/\Lambda}{1 + \Lambda} \right] \left[\frac{T}{T + \frac{1}{\Lambda}} \right]^{1.5} e^{\frac{-T}{\Lambda}} \right), \quad (3.23)$$

where we used the parameters $F_0 = 25$, $\Lambda = 1$, $T = \pi t / \Gamma$ and $\Gamma = 1 \cdot 10^{-3}$. The resulting impact is shown in Fig. 3.9. The maximum amplitude (≈ 10 N) is similar to those in the experiments. Also, the main part of the contact occurred before 1 ms and the signal practically died out after 2 ms. Fig. 3.10 presents a comparison of theoretical and experimental impact shapes. The solid line represents the force given by Eq. (3.23). The experimental load recorded in the validation of Beam III (Section 3.4) and reprinted from Fig. 3.5a is shown by circle marker. The theoretical force is in fairly good agreement with the experimental force in Fig. 3.10.

We used the same numerical parameters as in Section 3.4 because it was shown that these led to good transient responses. The number of modes were set to $n_w = 20$ and $n_c = n_b = 10$. The time increment was $\Delta t = 50 \cdot 10^{-6}$ s and we used $N = 2^{19}$

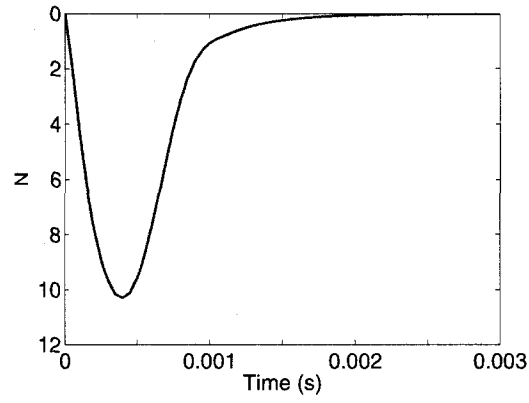


Figure 3.9 – Theoretical impact loading defined by Eq. (3.23)

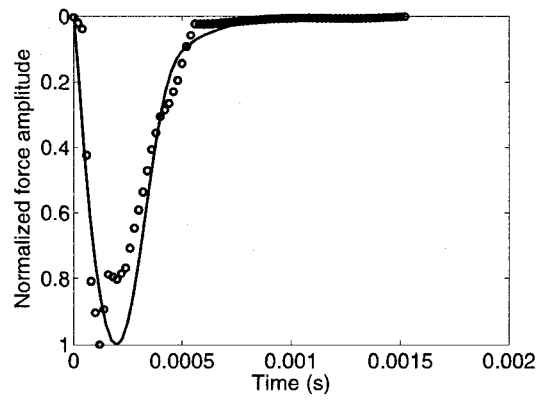


Figure 3.10 – Comparison of theoretical (—, Eq. (3.23)) and real (—○—, Experimental case from Fig. 3.5a) impact shape.

simulation points, for a simulation time of approximately 26 s.

3.5.3 Results and discussion

Figs. 3.11 to 3.14 show results for cantilever beams with different PCLD configurations. Every case treated is compared to the unpadded beam for which an analytical solution is available ((Balachandran and Magrab, 2004)). Each system was excited at the free end of the beam and the responses were recorded at the same location.

Transient responses are shown in Fig. 3.11 for systems with different PCLD lengths, in Fig. 3.12 for different viscoelastic layer thicknesses, in Fig. 3.13 for different constraining layer thicknesses, and in Fig. 3.14 for different PCDL locations. In each case, it can be seen that the transient response is composed of two parts : The first part, which lasts for approximately 2 milliseconds, is the forced response of the system during the impact ; the second part is the free response of the system after the impact. In Figs. 3.11 to 3.14, an arrow indicates the time at the end of the contact, so that the responses shown to the left of the arrows are the forced responses. Remarkably, for a given force signal, the forced behaviour is identical for all beams : the unpadded beam and all PCLD padded beams exhibit almost identical forced responses. In addition, it was shown from Fig. 3.8 that PCLDs have little influence on the impact force itself. Therefore, it can be concluded that PCLDs have little effect on the forced response of impacted point of the beam.

First, the influence of the PCLD length is analyzed. To do so, the viscoelastic layer thickness (h_v), the constraining beam thickness (h_c) and the position (x_1 , see Fig. 3.1) of PCLD were fixed. The PCLD lengths used were $L_c =$

$L/5$, $2L/5$, $3L/5$, $4L/5$. The case where $L_c = L$ is avoided because the impact has to be applied directly on the base beam and not on the PCLD. Transient responses of the treated beams are compared to the response of the bare beam (full black line). The results are shown in Fig. 3.11.

We observe that beams with longer treatments have smaller amplitudes than beams with shorter treatments. For instance, the third column of Table 3.8 shows the relative difference of the amplitude as compared to the bare beam at $t = 0.02$ s. We clearly see that this difference increases with the PCLD length. In the second column of Table 3.8, RMS values over the 25 ms are shown. Again, a similar pattern is observed : overall, RMS values are higher for shorter PCLDs.

As mentioned above, the first part of Fig. 3.11 is the forced response where all beams are experiencing the same displacement. After that short moment (2 ms), the different beams are free to move with different behaviors. The time of separation (TOS) will be defined as the moment when the displacement of the treated beam is no longer the same as the displacement of the bare beam. A long TOS means that the PCLD is slowly effective, while a short TOS implies a quick action. The TOS observed in Fig. 3.11 are presented in Table 3.8. It can be seen that a longer PCLD yields a shorter TOS. Based on both the TOS and the amplitude, it is clear that for $x_1 = 0$, a short PCLD treatment has a relatively poor effect on the response of the beam.

It can be seen that beams with a short PCLD (e.g. $L_c = L/5$, full gray line, and $L_c = 2L/5$, dashed gray line), the TOS is much longer than the duration of the forced response. Longer PCLDs yield shorter TOSs. In particular, the TOS for

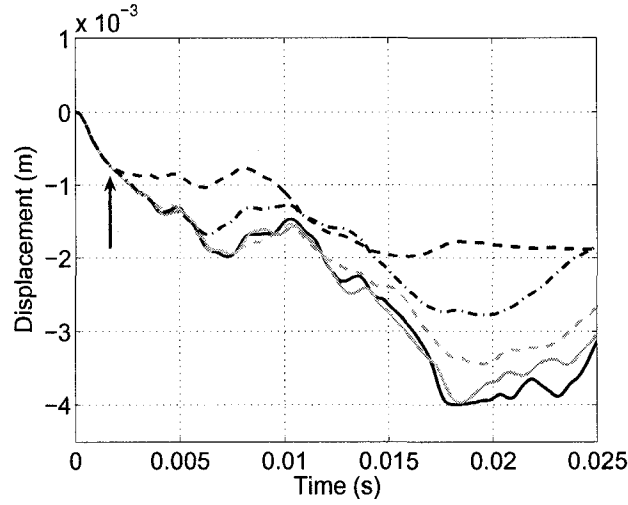


Figure 3.11 – Transient response for different PCLD lengths. $x_f = x_0 = L$, $h_v = h_c = h_b/2$, $x_1 = 0$. $L_c = L/5$ (—), $L_c = 2L/5$ (---), $L_c = 3L/5$ (- - -), $L_c = 4L/5$ (---). Bare beam (—)

Tableau 3.8 – Effect of different PCLD lengths over the amplitudes of displacement.

L_c	RMS amplitude (mm) over 25 ms	Relative difference at $t = 0.02$ s (%)	TOS (ms)
Bare Beam	$2.6 \cdot 10^{-3}$	—	—
$L/5$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	5.6	19
$2L/5$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	13.0	12
$3L/5$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	29.2	6
$4L/5$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	46.3	2

$L_c = 4L/5$ (dashed black line) is quite similar to the contact duration.

Fig. 3.12 shows the effect of different viscoelastic layer thicknesses, while the other properties were fixed ($h_c = h_b/2$, $L_c = x_1 = L/5$). In these cases, the PCLDs seem to have a rather constant effect, even for different values of h_v . Again, the forced response is clearly seen because of all the beams moving together. After the forced response, the padded beams are moving in a very similar way. The RMS amplitudes for each viscoelastic thickness are shown in Table 3.9. It turns out that the values do not vary significantly and, it appears that all PCLDs have a similar effect on

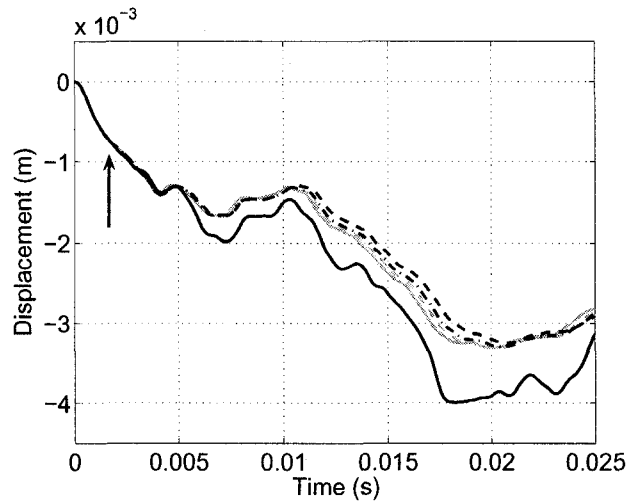


Figure 3.12 – Transient response for different viscoelastic thicknesses. $x_f = x_0 = L$, $h_c = h_b/2$, $x_1 = L/5$, $L_c = 2L/5$. $h_v = h_b/2$ (—), $h_v = 3h_b/4$ (— · —), $h_v = h_b$ (---), $h_v = 3h_b/2$ (---). Bare beam (—).

Tableau 3.9 – RMS values associated with Fig. 3.12

h_v	RMS
Bare Beam	$2.6 \cdot 10^{-3}$
$h_b/2$	$2.2 \cdot 10^{-3}$
$3h_b/4$	$2.2 \cdot 10^{-3}$
h_b	$2.2 \cdot 10^{-3}$
$3h_b/2$	$2.1 \cdot 10^{-3}$

the beam (the RMS amplitude reduction is approximately 15% in all cases). Also, the TOS for all configurations occurs approximately at the same time ($t \approx 5$ ms) and from that point, the transverse motion shapes are quite similar.

In the case of a variable constraining layer thickness (for $x_1 = L_c = 2L/5$, $h_v = h_b/2$), the results are shown in Fig. 3.13. Again, the TOS is around 5 ms for all PCLDs. However, after TOS, the amplitudes of displacement differ slightly for different PCLDs, as can be seen both in Fig. 3.13 and in the RMS values (see Table 3.10).

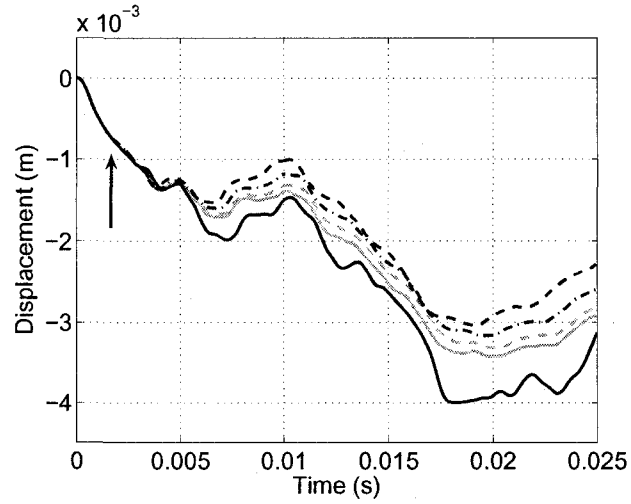


Figure 3.13 – Transient response for different constraining layer thicknesses. $x_f = x_0 = L$, $h_v = h_b/2$, $x_1 = L_c = 2L/5$. $h_c = h_b/4$ (.....), $h_c = h_b/2$ (- · - · -), $h_c = 3h_b/4$ (- - -), $h_c = h_b$ (---). Bare beam (—).

Tableau 3.10 – RMS values associated with Fig. 3.13

h_c	RMS
Bare Beam	$2.6 \cdot 10^{-3}$
$h_b/4$	$2.3 \cdot 10^{-3}$
$h_b/2$	$2.2 \cdot 10^{-3}$
$3h_b/4$	$2.1 \cdot 10^{-3}$
h_b	$2.0 \cdot 10^{-3}$

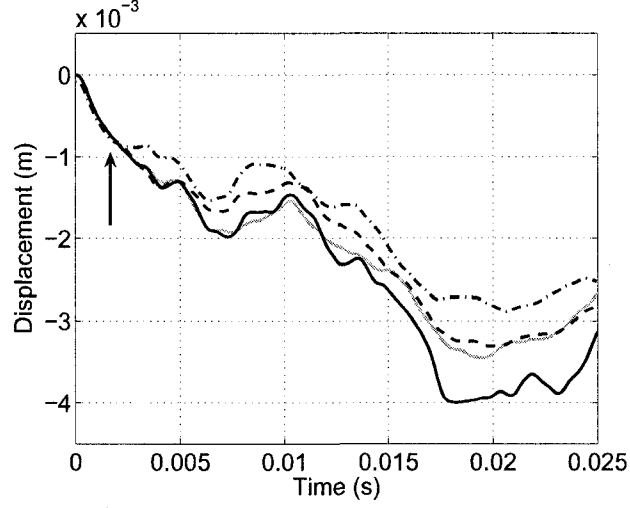


Figure 3.14 – Transient response for different PCLD positions. $x_f = x_0 = L$, $h_v = h_c = h_b/2$, $L_c = 2L/5$. $x_1 = 0$ (—), $x_1 = L/5$ (---), $x_1 = 2L/5$ (-.-). Bare beam (—).

Finally, the length of the PCLDs, the viscoelastic thickness and the constraining layer thickness were all fixed and the effect of the patch position was studied. For the case where $L_c = 2L/5$, there are three possible values for x_1 : 0, $L/5$ and $2L/5$. Again, it was not possible to have $L_c = 3L/5$ because the impact load would have occurred on the PCLD. The results are plotted on Fig. 3.14. For the three cases, the TOS times and RMS values are listed in Table 3.11. Both the amplitudes of displacement and TOS are smaller for PCLDs located farther from the clamped edge. However, for such position the energy of deformation of the base beam is very small as compared to a position near the clamp, meaning that the shear deformation γ_2 which is responsible for the damping should also be small. The fact that the amplitude of displacement is smaller when a PCLD is located far from the clamped edge is more likely to be caused by an added mass effect than by damping itself.

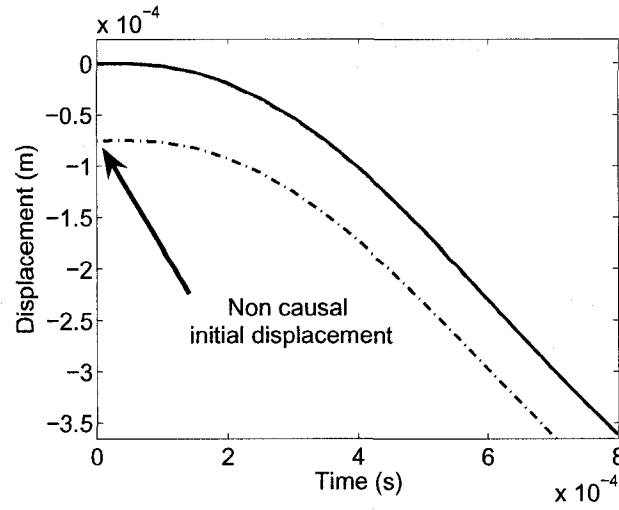


Figure 3.15 – Very beginning of transient response for different PCLD positions. $x_f = x_0 = L$, $h_v = h_c = h_b/2$, $L_c = 2L/5$. $x_1 = 0$ (—), $x_1 = L/5$ (---), $x_1 = 2L/5$ (- · -). Bare beam (—).

Tableau 3.11 – RMS values associated with Fig. 3.14

x_1	RMS	TOS (ms)
Bare Beam	$2.6 \cdot 10^{-3}$	—
0	$2.3 \cdot 10^{-3}$	7
$L/5$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	5
$2L/5$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	2

3.5.4 Causality

Fig. 3.15 shows the very beginning of the transverse motions presented in Fig. 3.14. The initial displacement of the PCLD with $x_1 = L_c = 2L/5$ is not exactly zero as it should be (and as it is for the three other cases). This is a non causal initial displacement implying that the system is moving *before* the impact is applied. As discussed in Section 3.2, non causality may occur if the viscoelastic material properties are wrongly represented which is not the case here because viscoelastic data were found by experiments using a real material. The causality problem in Fig. 3.15 comes from the use of the Fourier Transform in the solution.

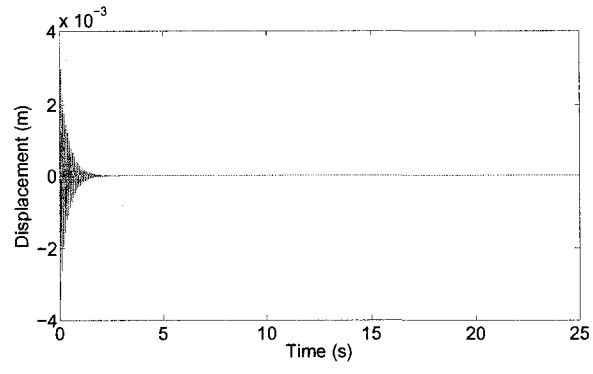
The use of a Fourier Transform assumes a time periodic function of period τ . Thus, the time signal will be repeated every τ seconds implying that the values of the signal at the end of τ equal the values of the signal at the beginning of τ . This is also true for $t < 0$. In our case, $\tau = T_{max} = N\Delta t$. The system is submitted to an impact at $t = 0$, so there is no displacement at this time. However, if the response has not completely died out at the end of the simulation time ($w(x, t = T_{max}) \neq 0$), then the simulated response $w(x, t = 0)$ is not zero and causality is not respected. Fig. 3.16 shows two responses simulated over $0-T_{max}$ seconds for the same PCLD, but located at two different positions. Fig. 3.16a represents the case where $h_v = h_c = h_b/2$, $L_c = 2L/5$ and $x_1 = 0$. The amplitude of displacement completely dies out after approximately 2 seconds. Consequently, this signal respects causality (see Fig. 3.15). In Fig. 3.16b, the PCLD is located farther from the clamped edge, at $x_1 = 2L/5$. There are still important oscillations amplitude ($\approx 2 \cdot 10^{-4}$ m), even after 25 seconds of simulation. It is clear that this response will create a non causal behavior as depicted in Fig. 3.15.

Applying an FFT analysis to the last 5 seconds of the signal presented in Fig. 3.16b, we find out that the main frequency component is 9.8 Hz which corresponds to the first natural frequency of the PCLD padded beam. Therefore, for this case, the non causality of the response is due to the fact that the PCLD is not damping the first mode efficiently. In fact, the PCLD is relatively small and is located far from the clamped edge where, for the first mode shape of a cantilever beam, there is very little energy of deformation. As discussed earlier, this leads to a small value for the shear deformation of the viscoelastic layer. This is a problem because the viscoelastic has to experience shear deformation to dissipate energy. Without deformation, it acts more like a mass without dissipative properties. It should be pointed out that the bare beam response *is* causal although there is no damping, because displacements were obtained using a classical analytical solution instead of Fourier Transform method.

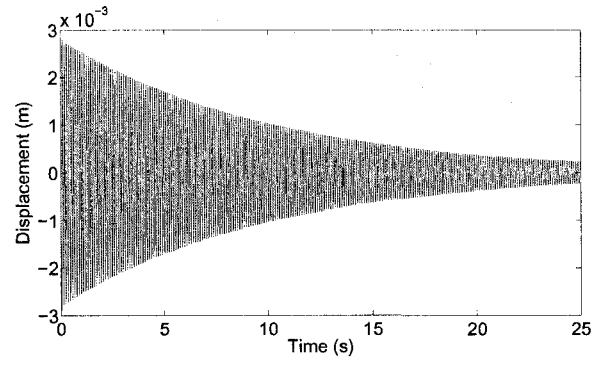
The perfect way to get rid of the causality problem is to increase the time of simulation to give the system all the time needed to be completely damped. However, this is time consuming and, above all, memory consuming.

3.6 Conclusion

The initial transient response of cantilever beams with PCLDs was studied in this article. First, the equations of motion of the system were developed using a Lagrangian approach. The viscoelasticity properties of the PCLD damping layer were taken into account using Prony Series representation expressed in the frequency domain. The equations were solved in the frequency domain (leading at the same



(a)



(b)

Figure 3.16 – Long time transient response for two PCLD positions. $x_f = x_0 = L$, $h_v = h_c = h_b/2$, $L_c = 2L/5$. (a) $x_1 = 0$ (b) $x_1 = 2L/5$

time to the natural frequencies). The responses were converted back in the time domain using inverse Fast Fourier Transforms, resulting in the transverse transient response of the system due to a general impact force. Both the natural frequencies and the transient responses were validated based on literature and experiments. It was shown that the presented work is very well suited to represent cantilever beams with many different PCLDs configurations, in particular for thin and thick viscoelastic layers.

Some numerical computations were conducted in order to observe the effects of the four geometric parameters of the PCLDs (the length, L_c , the position, x_1 , the viscoelastic layer thickness, h_v and the constraining layer thickness, h_c). Transient responses of the padded beams were compared to the unpadded beam ones. With these few numerical examples, it seems so far that among the four parameters tested (L_c , h_v , h_c and x_1), the PCLD length has the greatest influence on the initial transverse displacement of the treated beam. The PCLD position also has a great influence on the initial response. However, the constraining layer thickness and the viscoelastic layer thickness seem to have a little influence on the initial response.

Nevertheless, a more thorough study has to be made to better understand the effects of each of these parameters. Also, from the present research, it seems that added mass has a major effect on the initial transient response (whereas damping is very important to reduce the ringing vibrations). It will be very important to understand the influence of the added mass due to PCLD on the transverse displacement reduction as compared to the viscoelastic damping effect. This will be the goal of future work.

3.7 Appendix A – Admissible functions

- i. For the transverse motion $w(x, t)$ of the cantilever system, we use

$$W_i = \cosh(\lambda_i x) - \cos(\lambda_i x) - \sigma_i [\sinh(\lambda_i x) - \sin(\lambda_i x)], \quad (3.24)$$

$$i = 1, \dots, n_w,$$

where

$$\sigma_i = \frac{\sinh(\lambda_i L) - \sin(\lambda_i L)}{\cosh(\lambda_i L) + \cos(\lambda_i L)},$$

and $\lambda_1 L = 1.875$, $\lambda_2 L = 4.694$, $\lambda_i L = (i - 0.5)\pi$, $i = 3, \dots, n_w$.

- ii. For the base beam motion along the x -axis, we use the longitudinal mode shapes of a cantilever beam :

$$U_{b,j} = \sin \left[\frac{(2j+1)\pi x}{2L} \right], \quad j = 1, \dots, n_b. \quad (3.25)$$

- iii. Finally, the constraining layer is treated as a free-free beam in the longitudinal direction. So the admissible functions are given by

$$U_{c,k} = \cos \left[\frac{(k-1)\pi x}{L_c} \right], \quad k = 1, \dots, n_c. \quad (3.26)$$

3.8 Appendix B – Submatrices terms involved in energy expressions

$$[M_b] = \rho_b h_b B \int_0^L \mathbf{W}^T \mathbf{W} dx, \quad (3.27)$$

$$[M_v] = \rho_v h_v B \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{W}^T \mathbf{W} dx, \quad (3.28)$$

$$[M_c] = \rho_c h_c B \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{W}^T \mathbf{W} dx. \quad (3.29)$$

$$[K_{\alpha,1}] = E_{\alpha} B h_{\alpha} \int_{L_{\alpha}} \mathbf{U}_{\alpha,x}^T \mathbf{U}_{\alpha,x} dx, \quad (3.30)$$

$$[K_{\alpha,2}] = E_{\alpha} I_{\alpha} \int_{L_{\alpha}} \mathbf{W}_{xx}^T \mathbf{W}_{xx} dx. \quad (3.31)$$

$$[K_{v,1}] = g \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{U}_c^T \mathbf{U}_c dx, \quad (3.32)$$

$$[K_{v,2}] = g \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{U}_c^T \mathbf{U}_b dx, \quad (3.33)$$

$$[K_{v,3}] = g \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{U}_b^T \mathbf{U}_b dx, \quad (3.34)$$

$$[K_{v,4}] = dg \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{U}_c^T \mathbf{W}_x dx, \quad (3.35)$$

$$[K_{v,5}] = dg \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{U}_b^T \mathbf{W}_x dx, \quad (3.36)$$

$$[K_{v,6}] = d^2 g \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{W}_x^T \mathbf{W}_x dx, \quad (3.37)$$

$$d = \frac{2h_v + h_c + h_b}{2}, \quad (3.38)$$

$$g = \frac{G^* B}{h_v}. \quad (3.39)$$

CHAPITRE 4

RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET ANALYSES COMPLÉMENTAIRES

Au chapitre précédent, un modèle analytique représentant le comportement d'un système composé d'une poutre avec traitement amortissant partiel et contraint a été développé. Ce modèle permet d'obtenir la réponse harmonique du système et sa réponse transitoire suite à un impact. Les résultats obtenus à l'aide du modèle ont été confrontés à des données provenant de la littérature et d'essais expérimentaux. Il a été démontré que les fréquences naturelles et les réponses transitoires initiales sont correctement modélisées et donc que le modèle est valide. À la section 3.5, quelques résultats numériques ont été présentés dans l'optique d'ouvrir la discussion sur l'influence des différents paramètres composant le tampon amortissant. Le présent chapitre constitue la suite de cette dernière section. On traite d'abord de façon plus détaillée l'effet de la position du traitement (x_1) sur l'erreur de causalité. Puis on s'intéresse à l'effet de la longueur (L_c), de l'épaisseur de la couche de viscoélastique (h_v) et de l'épaisseur de la couche de contrainte (h_c) sur la réponse transitoire initiale. De plus, au cours du chapitre, l'effet dû à l'ajout de masse sur les déplacements initiaux est étudié.

4.1 Paramètres du système et force d'impact

Les données utilisées à la section 3.5 sont reprises ici. La poutre de base est encastrée-libre et mesure $L = 0.5$ m. Les propriétés physiques et mécaniques des

couches de contrainte et de viscoélastique ainsi que celles de la poutre de base sont indiquées aux tableaux 3.5 et 3.6. Encore une fois, les modes utilisés dans l'équation (3.18) sont $n_w = 20$ et $n_b = n_c = 10$; ces valeurs ont fourni de bons résultats lors de la validation du modèle (section 3.4). Le domaine temporel est discrétisé en $N = 2^{19}$ points avec un incrément $\Delta t = 50 \cdot 10^{-6}$ s, constituant une période totale d'environ $T_{max} = 26$ secondes.

Il a aussi été démontré au chapitre précédent que dans les expériences, la forme de l'impact était relativement constante d'un essai à un autre (figure 3.8). C'est pourquoi un impact théorique défini par l'équation (3.23) et présenté à la figure 3.9, est utilisé pour l'obtention de tous les résultats numériques.

4.2 Erreur de causalité

La figure 4.1 représente le régime transitoire initial en fonction de la position du tampon amortissant x_1 et pour différentes épaisseurs de matériau viscoélastique h_v pour un tampon court ($L_c = L/5$), dont la couche de contrainte est mince ($h_c = h_b/4$). Les impacts et les observations ont tous lieu à l'extrémité libre de la poutre. Les différentes courbes sont comparées à la poutre de base sans traitement (—).

On remarque que plus le tampon amortissant est éloigné de l'encastrement, plus le déplacement initial est important. Les réponses ne sont donc pas causales. La problématique de la causalité a été traitée à la section 3.5.4. Dans le présent chapitre, on mesurera l'erreur de causalité en pourcentage de la manière suivante :

$$C = \frac{w(t=0)}{w_{theo}^{max}} \cdot 100\%, \quad (4.1)$$

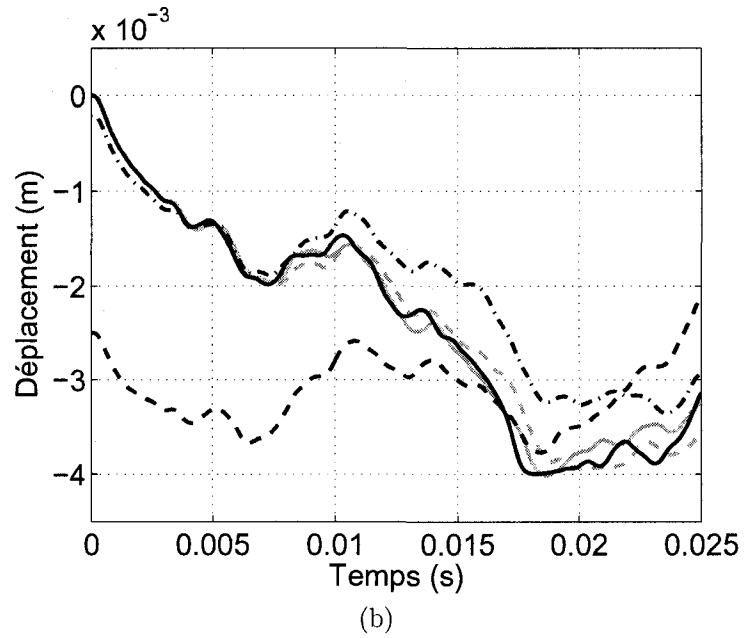
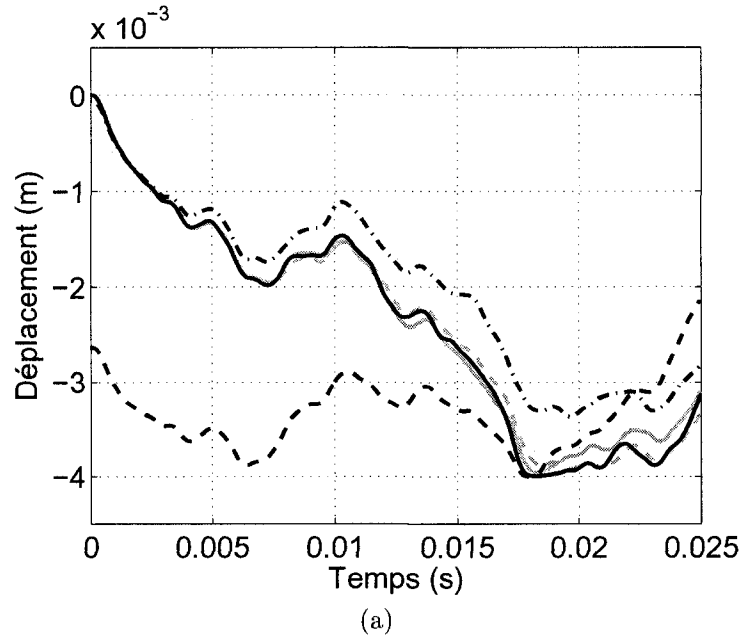


Figure 4.1 – Effet de la position x_1 pour un tampon d'une longueur $L_c = L/5$ dont la couche de contrainte possède une épaisseur $h_c = h_b/4$ sur la réponse initiale transitoire. Poutre nue (—). $x_1 = 0$ (---). $x_1 = L/5$ (---). $x_1 = 2L/5$ (-.-.). $x_1 = 3L/5$ (---). (a) $h_v = h_b/4$ (mince) (b) $h_v = h_b/2$ (moyenne) (c) $h_v = h_b$ (épaisse).

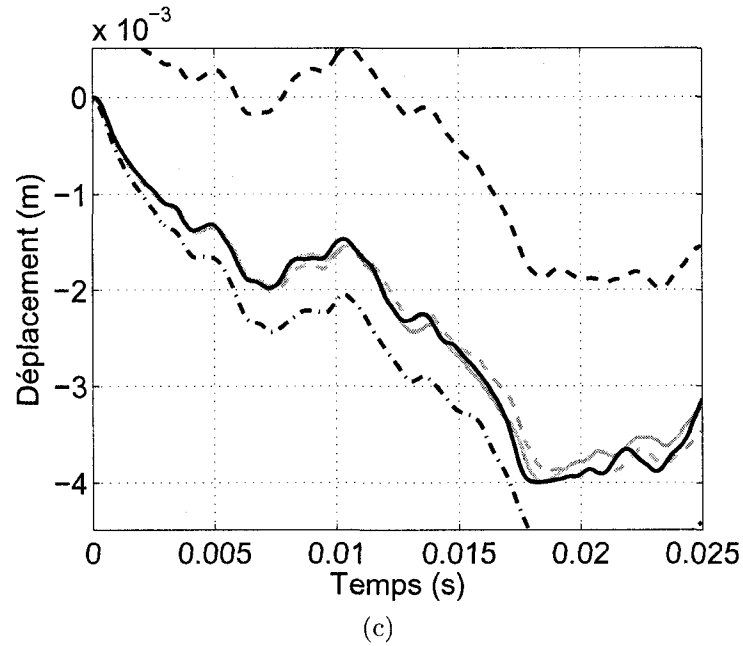


Figure 4.1 – (suite) Poutre nue (—). $x_1 = 0$ (—). $x_1 = L/5$ (—). $x_1 = 2L/5$ (—). $x_1 = 3L/5$ (—).

où $w(t = 0)$ est le déplacement initial de la réponse calculée et où w_{theo}^{max} est l'amplitude maximale du déplacement théorique de la poutre nue sur une période de 25 ms. Dans le cas de la poutre de base utilisée dans les calculs, $w_{theo}^{max} = -3.995 \cdot 10^{-3}$ m à $t = 18.2$ ms. Les résultats sont montrés au tableau 4.1. Si $C \leq 1\%$, alors on dira que la réponse est causale.

Le tableau 4.1 montre clairement que plus la valeur de x_1 augmente, moins la

Tableau 4.1 – Erreurs de causalité (C , %) de $w(L, t)$ en fonction de la position x_1 et de l'épaisseur de la couche de viscoélastique h_v d'un tampon amortissant. $L_c = L/5$. $h_c = h_b/4$.

x_1	$h_v = h_b/4$	$h_v = h_b/2$	$h_v = h_b$
0	-0,00058	-0,00058	-0,00068
$L/5$	-0,03754	0,52560	-0,23777
$2L/5$	1,40161	1,07624	5,00575
$3L/5$	65,07483	-27,53166	62,57198

Tableau 4.2 – Erreurs de causalité (C , %) de $w(L, t)$ en fonction de la position x_1 et de l'épaisseur de la couche de viscoélastique h_v d'un tampon amortissant. $L_c = 2L/5$.

x_1	$h_v = h_b/4$	$h_v = h_b/2$	$h_v = h_b$
0	-0,00047	-0,00047	-0,00047
$L/5$	-0,00048	-0,00048	-0,00049
$2L/5$	-3,45397	4,17981	-0,82595

causalité est respectée. Lorsque le tampon se trouve près de l'encastrement, la réponse au temps $t = 0$ est pratiquement nulle. Pour $x_1 = L/5$, déjà, une différence importante se présente (le rapport entre les valeurs de la seconde ligne du tableau et celles de la première ligne sont environ de deux ordres de grandeur pour $h_v = h_b/4$ et de trois ordres de grandeurs pour $h_v = h_b/2$ et $h_v = h_b$). Les cas où un petit tampon est installé près de l'extrémité libre de la poutre sont particulièrement défaillants. Il est aussi clair selon le tableau que l'épaisseur du viscoélastique n'a que peu d'effet sur le problème et même si le tampon est plus épais, l'amortissement induit dans le système ne semble pas meilleur pour une position donnée.

Les figures III.1 et III.2 (présentées à l'annexe III) représentent les déplacements pour des cas où la longueur du tampon amortissant est plus importante. Les mesures de causalité sont présentées aux tableaux 4.2 et 4.3. Dans le cas d'un tampon mesurant $2L/5$ (tableau 4.2), les réponses sont causales si le tampon est placé à $x_1 = 0$ ou à $x_1 = L/5$, alors que pour $x_1 = 2L/5$, elle ne le sont pas. Le tableau 4.3 fournit les données relatives à un tampon de longueur $L_c = 3L/5$. En se basant sur le critère défini plus haut (la réponse est causale si $C \leq 1\%$, équation (4.1)), on constate que dans les deux positions possibles, la causalité est respectée et ce, pour toutes les épaisseurs de viscoélastiques.

On peut donc conclure que :

Tableau 4.3 – Erreurs de causalité (C , %) de $w(L, t)$ en fonction de la position x_1 et de l'épaisseur de la couche de viscoélastique h_v d'un tampon amortissant. $L_c = 3L/5$.

x_1	$h_v = h_b/4$	$h_v = h_b/2$	$h_v = h_b$
0	-0,00048	-0,00049	-0,00053
$L/5$	-0,00048	-0,00047	-0,00050

1. Plus le tampon est près de l'encastrement (x_1 faible), plus la causalité est respectée.
2. Plus le tampon est petit, plus un problème de causalité risque de survenir quand x_1 augmente.

En revanche, pour une position donnée x_1 , le rôle joué par l'épaisseur de la couche de viscoélastique n'est pas clair. Par exemple, dans le cas d'un tampon long ($L_c = 3L/5$, tableau 4.3), la variation de h_v n'influence pas l'erreur de causalité, peu importe la position x_1 . Lorsque le tampon mesure $L = 2L/5$ (tableau 4.2), encore une fois, aucune différence n'est notée si $x_1 = 0$ ou $x_1 = L/5$. Par contre, pour la position la plus éloignée $x_1 = 2L/5$, une nette diminution de l'erreur s'opère lorsque h_v passe de $h_b/2$ à h_b , passant de quelques pourcents à moins de 1%. Cependant, pour la même position, le comportement de l'erreur est l'inverse lorsque $L_c = L/5$ (tableau 4.1) : C passe d'un peu plus de 1% ($h_v = h_b/4$ et $h_v = h_b/2$) à 5% pour $h_v = h_b$. Et alors que pour $L_c = 2L/5$ la causalité était respectée pour $x_1 = 0$ et $x_1 = L/5$, pour $L_c = L/5$, elle n'est respectée que si le tampon est à $x_1 = 0$. Compte tenu de ces informations, on peut uniquement conclure que lorsque le tampon est placé à l'encastrement, l'influence de la variation de h_v est négligeable.

Il est important de s'attarder à l'effet dû à la masse ajoutée par le tampon comme tel. Le rôle de cette augmentation de masse et d'inertie par rapport au problème de causalité doit être quantifié. La figure 4.2 représente la réponse transitoire de

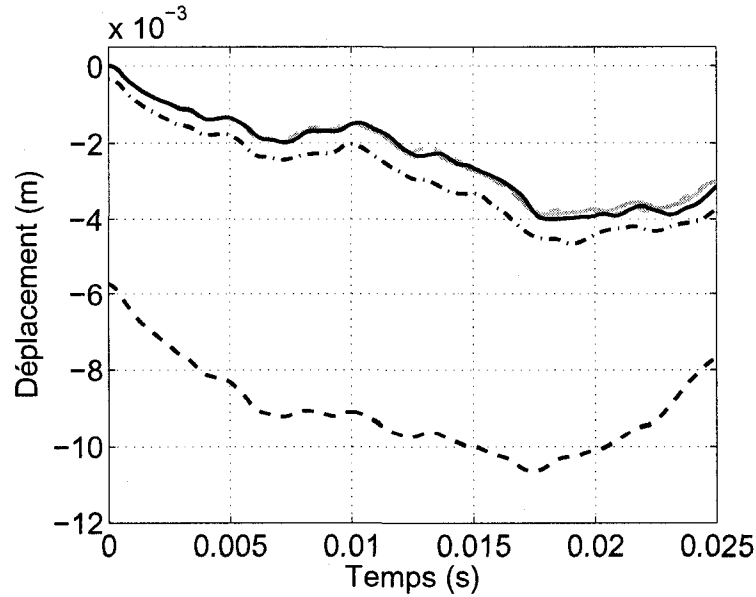


Figure 4.2 – Effet de la position x_1 sur la réponse transitoire initiale pour un tampon amortissant sans masse dont les caractéristiques sont : $L_c = L/5$, $h_c = h_b/4$ et $h_v = h_b/4$. Poutre nue (—). $x_1 = 0$ (— — —). $x_1 = L/5$ (---). $x_1 = 2L/5$ (- . -). $x_1 = 3L/5$ (· · ·).

poutres amorties à l'aide de tampons courts et positionnés à différents endroits x_1 . Toutefois, la masse de ces tampons a été supprimée : les valeurs des termes $[M_v]$ et $[M_c]$ sont nulles (équation (3.18)). De cette façon, il est possible d'analyser uniquement l'influence de la rigidité du tampon (dont fait partie la rigidité complexe du viscoélastique). Encore une fois, on remarque la présence de réponses qui sont causales et d'autres qui ne le sont pas, à différents degrés. Les valeurs de quantification de la causalité sont présentées dans le tableau 4.4 pour différentes valeurs h_v .

Les tendances observées au tableau 4.4 sont semblables à celle obtenues lorsque la masse du tampon était considérée : l'erreur de causalité augmente avec l'écart entre le tampon et l'encastrement, mais ne dépend pas de l'épaisseur du viscoélastique. Globalement toutefois, les valeurs montrées dans le tableau 4.4 sont légèrement

Tableau 4.4 – Erreurs de causalité (C , %) de $w(L, t)$ en fonction de la position x_1 et de l'épaisseur de la couche de viscoélastique h_v d'un tampon amortissant sans masse. $L_c = L/5$. Les valeurs entre parenthèses sont les différences entre les valeurs du tableau 4.1 (avec masse) et celles du tableau 4.4 (sans masse)

x_1	$h_v = h_b/4$	$h_v = h_b/2$	$h_v = h_b$
0	-0,00061 (0,00003)	-0,00075 (0,00018)	-0,00060 (-0,00008)
$L/5$	-0,12514 (0,08760)	0,27532 (-0,25029)	-0,12514 (-0,11263)
$2L/5$	7,93412 (6,53251)	1,67693 (0,60069)	8,00921 (3,00345)
$3L/5$	142,66406 (77,58923)	147,66982 (120,13816)	142,66406 (80,09211)

supérieures à celles du tableau 4.1. Notons que les valeurs données entre parenthèses représentent les différences entre les valeurs du tableau 4.1 (avec masse) et celles du tableau 4.4 (sans masse). Donc, l'ajout de masse limite l'amplitude de vibration, ce qui fait en sorte que pour un même taux d'amortissement, la réponse décroît plus rapidement et donc la causalité est légèrement mieux respectée. Par contre, cet effet est faible.

Dans le cas de tampon plus longs, il n'y a pratiquement aucune différence entre les cas avec masse ajoutée et les cas sans masse ajoutée sur le plan de la causalité (tableaux 4.5 et 4.6). Pour les positions $x_1 = 0$ et $x_1 = L/5$, il n'y pratiquement aucune différence entre les réponses avec et sans masse. Cela est vrai pour les deux longueurs de tampon présentées (tableaux 4.5 et 4.6). Pour ce qui est de la position $x_1 = 2L/5$, il y a de faibles différences; aucune tendance nette ne peut être tirée par rapport à l'épaisseur du viscoélastique.

L'influence de la position du tampon est majeure. Un positionnement en bout de poutre peut engendrer d'importants problèmes de causalité. La figure 4.1a montre clairement ce problème pour le cas où $x_1 = 3L/5$ (---). On constate qu'en plus de présenter un déplacement initial très important (quasiment du même ordre

Tableau 4.5 – Erreurs de causalité (C , %) de $w(L, t)$ en fonction de la position x_1 et de l'épaisseur de la couche de viscoélastique h_v d'un tampon amortissant sans masse. $L_c = 2L/5$ m. Les valeurs entre parenthèses sont les différences entre les valeurs du tableau 4.2 (avec masse) et celles du tableau 4.5 (sans masse)

x_1	$h_v = h_b/4$	$h_v = h_b/2$	$h_v = h_b$
0	-0,00048 (0,00)	-0,00048 (0,00)	-0,00048 (0,00)
$L/5$	-0,00047 (0,00)	-0,00048 (0,00)	-0,00048 (0,00)
$2L/5$	2,30265 (-1,15)	0,57566 (-3,60)	1,15132 (0,33)

Tableau 4.6 – Erreurs de causalité (C , %) de $w(L, t)$ en fonction de la position x_1 et de l'épaisseur de la couche de viscoélastique h_v d'un tampon amortissant sans masse. $L_c = 3L/5$ m. Les valeurs entre parenthèses sont les différences entre les valeurs du tableau 4.3 (avec masse) et celles du tableau 4.6 (sans masse)

x_1	$h_v = h_b/4$	$h_v = h_b/2$	$h_v = h_b$
0	-0,00048 (0,00)	-0,00048 (0,00)	-0,00048 (0,00)
$L/5$	-0,00048 (0,00)	-0,00048 (0,00)	-0,00048 (0,00)

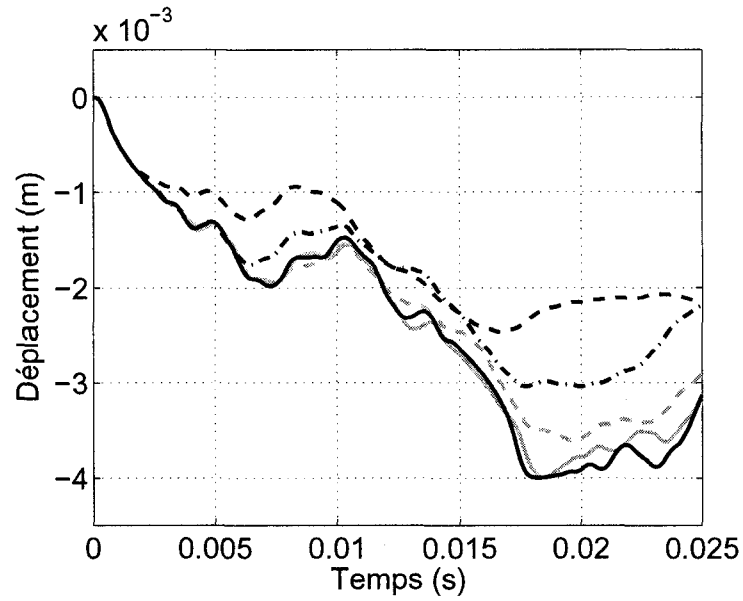
de grandeur que l'amplitude maximale du signal), le non respect de la causalité entraîne un comportement complètement différent de celui des autres poutres. On ne peut donc pas se fier à la réponse obtenue pour mener une analyse complète. On remarque cependant qu'aux alentours de 17 ms, le déplacement de la poutre problématique semble rejoindre celui des autres cas. Toujours à la figure 4.1a, la courbe représentant le cas $x_1 = 2L/5$ (— · —) est aussi non causale, mais l'erreur initiale est de beaucoup moindre importance ($C = 1,4\%$, tableau 4.1). Par le fait même, la réponse présente un comportement qui suit la tendance des autres courbes dès le départ (en moins de 3 ms). Sans en être sûr, il semble donc qu'il existe un moment à partir duquel une réponse non causale se comporte comme elle le devrait. Toutefois, si ce moment existe, il s'agit d'une donnée difficile à obtenir, laissant douter de l'utilisation de telles réponses pour comprendre le comportement du système.

On peut donc conclure que plus x_1 augmente, plus il y a un risque qu'une erreur de causalité survienne. Ce risque est encore plus important lorsque L_c diminue. L'effet d'ajout de masse n'influence que très peu le problème. Étant donné qu'il est difficile de savoir si une réponse non causale devient au cours du temps une source d'information fiable, les prochaines analyses traiteront des cas pour lesquels la causalité est automatiquement respectée. Selon les données obtenues, la position $x_1 = 0$ fournit dans tous les cas un comportement causal, peu importe les autres paramètres.

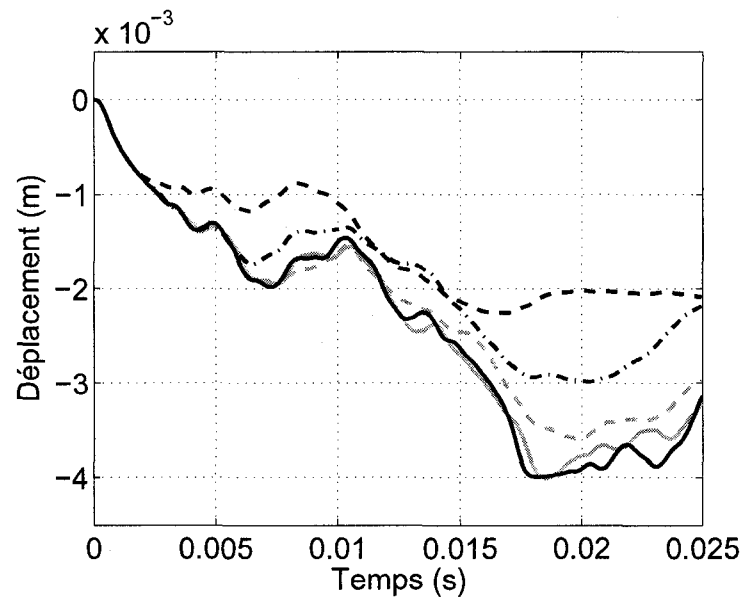
4.3 Influence de la longueur du tampon amortissant (L_c)

Pour comprendre l'effet de la longueur du tampon amortissant L_c , deux configurations de base sont étudiées. Dans les deux cas, la position du tampon est fixée à $x_1 = 0$ (pour les raisons évoquées à la section 4.2) et l'épaisseur de la couche de contrainte est de $h_c = h_b/4$. La couche de viscoélastique aura dans le premier cas une épaisseur de $h_v = h_b/2$ (moyenne) et dans le second $h_v = 3h_b/2$ (épaisse). Les déplacements sont représentés à la figure 4.3 pour des valeurs de $h_v = h_b/2$ et de $h_v = 3h_b/2$.

D'emblée, on remarque que plus la longueur du tampon est grande, plus l'amplitude du déplacement est faible. Pour un tampon court ($L_c = L/5$), l'allure de la courbe est très similaire à celle de la poutre nue. Les valeurs RMS des déplacements (m) présentées au tableau 4.7 corroborent ces affirmations. Dans tous les cas d'ajout de tampon, la valeur RMS est plus faible que la valeur de référence (0,0026 pour la poutre nue). De plus, la valeur de h_v a peu d'importance (figure 4.3a *vs* figure 4.3b),



(a)



(b)

Figure 4.3 – Déplacement initial pour différentes longueurs de tampons amortissants ($h_c = h_b/4$). Poutre nue (—). $L_c = L/5$ (— — —). $L_c = 2L/5$ (— · — · —). $L_c = 3L/5$ (— · — · —). $L_c = 4L/5$ (· · · · ·). (a) $h_v = h_b/2$ (figure 3.11). (b) $h_v = 3h_b/2$.

Tableau 4.7 – Valeurs RMS (m) du déplacement en fonction de la longueur du traitement amortissant L_c pour deux épaisseurs de couche viscoélastique. ($x_1 = 0$, $h_c = h_b/4$)

h_v	$L/5$	$2L/5$	$3L/5$	$4L/5$
$h_b/2$	0,00259	0,00243	0,00210	0,00172
$3h_b/2$	0,00259	0,00242	0,00205	0,00164

sauf dans les cas où L_c est grand : on voit alors une certaine réduction d'amplitude si h_v augmente (tableau 4.7)

On remarque aussi à la figure 4.3 que plus le tampon est long, plus l'allure de la courbe de déplacement est applanie vers la fin du signal présenté. La présence d'un long tampon empêche le système de retourner rapidement vers sa position d'équilibre. Aussi, la longueur du traitement a une influence sur le temps de séparation des courbes : une poutre traitée avec un tampon plus long se dissocie plus rapidement du comportement de la poutre nue. En fait, plus le traitement est long, plus le temps de séparation s'approche du temps où l'impact se termine. Sur les deux figures 4.3a et 4.3b, le temps de séparation de la courbe représentant $L_c = 4L/5$ est d'environ 1,6 ms. À cet instant, selon la figure 3.9, l'impact est pratiquement terminé.

Comme dans la section 4.2, l'influence de l'ajout de masse est étudié. La figure 4.4 représente les mêmes configurations que pour la figure 4.3, à l'exception que les masses du viscoélastique et de la couche de contrainte sont retirées.

Les mêmes conclusions s'appliquent quant à l'amplitude des déplacements : plus le viscoélastique est long, plus l'amplitude diminue. Les valeurs RMS sont présentées au tableau 4.8. En comparant les valeurs des tableaux 4.7 et 4.8, la différence entre les cas où on tient compte de la masse et ceux où l'on ne tient pas compte de la

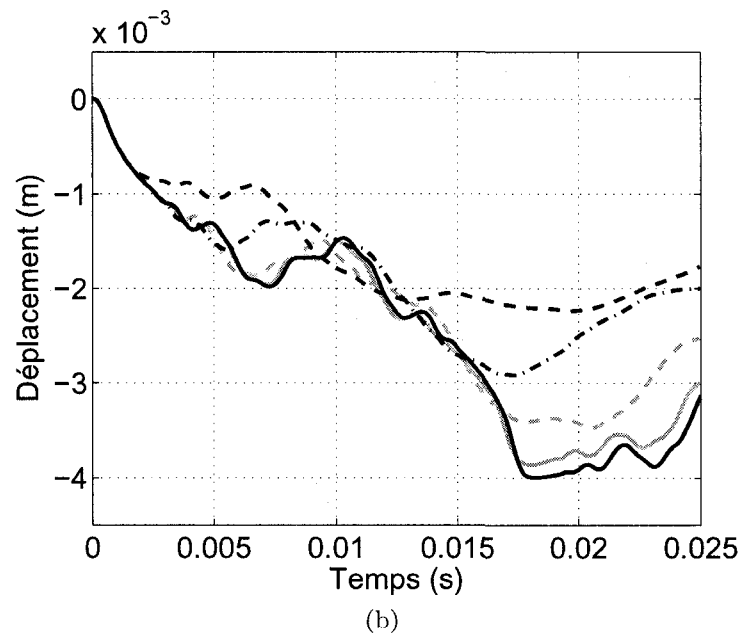
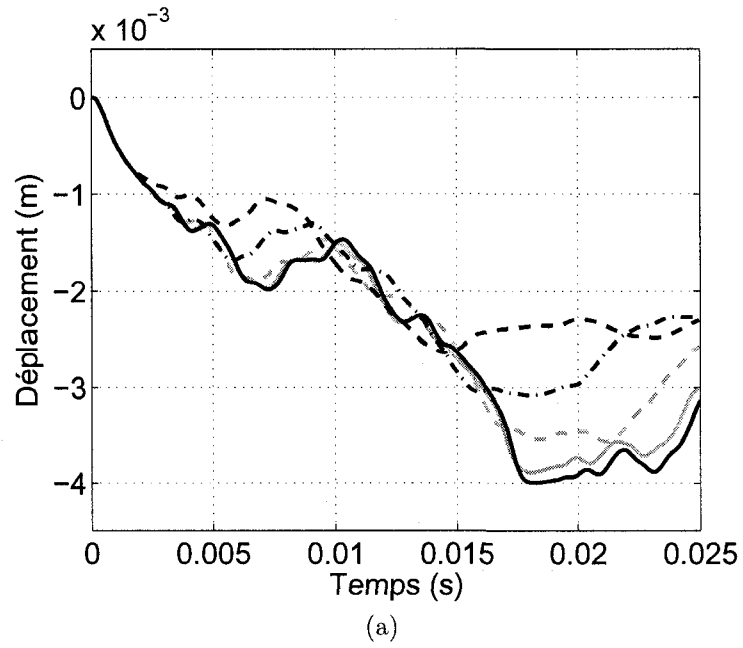


Figure 4.4 – Déplacement initial pour différentes longueurs de tampons amortissants sans masse ($h_c = h_b/4$). Poutre nue (—). $L_c = L/5$ (—). $L_c = 2L/5$ (---). $L_c = 3L/5$ (- · -). $L_c = 4L/5$ (---). (a) $h_v = h_b/2$. (b) $h_v = 3h_b/2$.

Tableau 4.8 – Valeurs RMS du déplacement (m) en fonction de la longueur du traitement amortissant L_c pour deux épaisseurs de couche viscoélastique et pour un tampon sans masse. ($x_1 = 0$, $h_c = h_b/4$)

h_v	$L/5$	$2L/5$	$3L/5$	$4L/5$
$h_b/2$	0,00259	0,00243	0,00213	0,00195
$3h_b/2$	0,00259	0,00242	0,00210	0,00189

masse survient lorsque la taille du tampon amortissant est plus longue. Dans le cas d'un viscoélastique d'épaisseur $h_v = h_b/2$, par exemple, si le tampon mesure $L_c = L/5$, alors il n'y a aucune différence d'amplitude notoire. Cependant, pour un tampon mesurant $L_c = 4L/5$, la différence est importante : $\text{RMS}_{\text{masse}}=0,00172$ et $\text{RMS}_{\text{sans masse}}= 0,00195$. Malgré cette différence, les deux valeurs sont toujours sous la valeur RMS de la poutre nue (0,0026) prouvant ainsi qu'il y a donc bel et bien réduction d'amplitude peu importe que la masse soit incluse ou non, mais la réduction est plus importante quand la masse est incluse.

De plus, comme pour les cas où la masse est considérée, l'ajout d'un long tampon fait en sorte que la « remontée » du système vers la position d'équilibre est plus lente que pour les petits tampons. En ce sens, la figure 4.5 présente le cas d'un tampon avec et sans masse ($L_c = 4L/5$, $x_1 = 0$, $h_v = 3h_b/2$, $h_c = h_b/4$). On remarque que le retrait de la masse du tampon a pour effet, vers la fin du signal présenté, d'induire une remontée (pente positive) alors que le tampon avec masse reste stable (et même très légèrement descendant). Cependant, l'allure des deux courbes relativement à leur aplatissement n'est pas modifiée.

L'influence de la longueur du traitement est importante. Plus le tampon amortissant est long, plus l'amplitude de déplacement est faible. C'est aussi le cas lorsque la masse n'est pas considérée, mais la diminution des déplacements est moins consi-

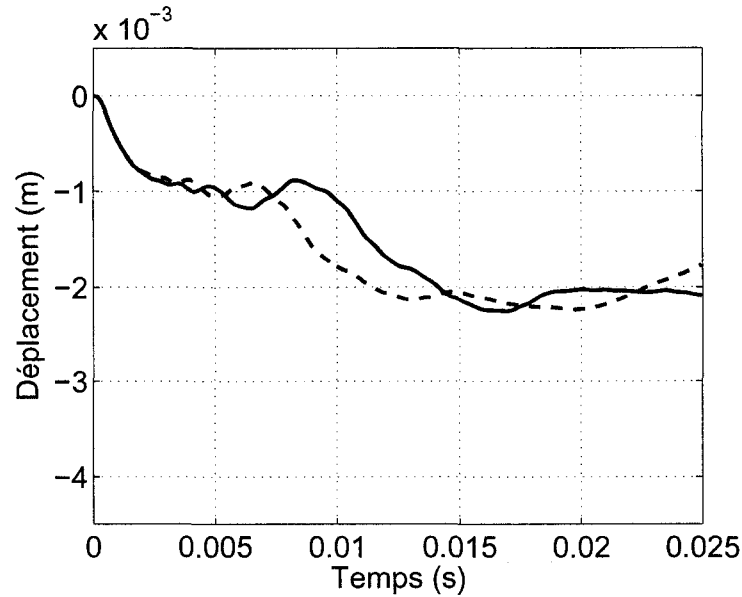
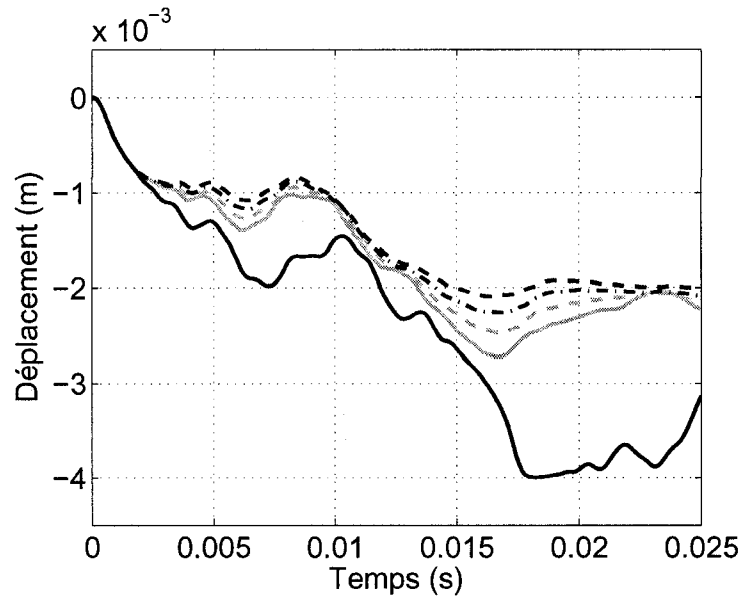


Figure 4.5 – Comparaison des déplacements initiaux d’une poutre avec tampon et avec tampon sans masse ($L_c = 4L/5$, $x_1 = 0$, $h_v = 3h_b/2$, $h_c = h_b/4$). Tampon avec masse (—). Tampon sans masse (---).

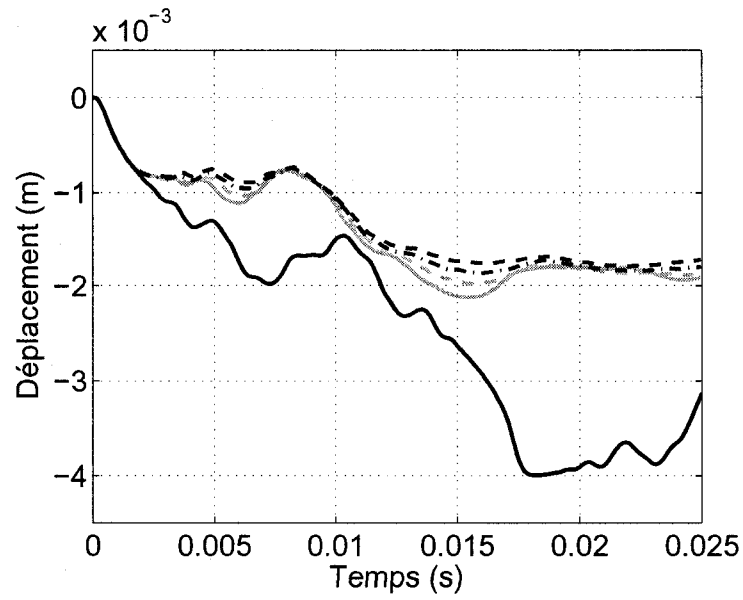
dérable.

4.4 Influence des épaisseurs des couches de viscoélastique (h_v) et de contrainte (h_c) du tampon amortissant

Maintenant que les influences de la position et de la longueur de la couche de contrainte ont été étudiées, l’effet de l’épaisseur des différentes couches composant le tampon amortissant sera analysé en fixant $L_c = 4L/5$. Pour cette valeur, en se basant sur le fait que l’excitation ne peut avoir lieu à un endroit couvert par le tampon, la seule position autorisée est $x_1 = 0$. Les figures 4.6 et 4.7 illustrent les réponses transitoires initiales pour des valeurs de h_c allant de $h_b/4$ à $3h_b/2$ respectivement en fonction de l’épaisseur de la couche viscoélastique. Le tableau 4.9 présente les différentes valeurs RMS pour tous les cas.



(a)



(b)

Figure 4.6 – Déplacement initial pour différentes épaisseurs de viscoélastique. Poutre nue (—). $h_v = h_b/4$ (— — —). $h_v = h_b/2$ (— · — · —). $h_v = 3h_b/4$ (— · — · —). $h_v = h_b$ (— · — · —). (a) $h_c = h_b/4$. (b) $h_c = h_b/2$. (c) $h_c = 3h_b/4$. (d) $h_c = h_b$. (e) $h_c = 3h_b/2$.

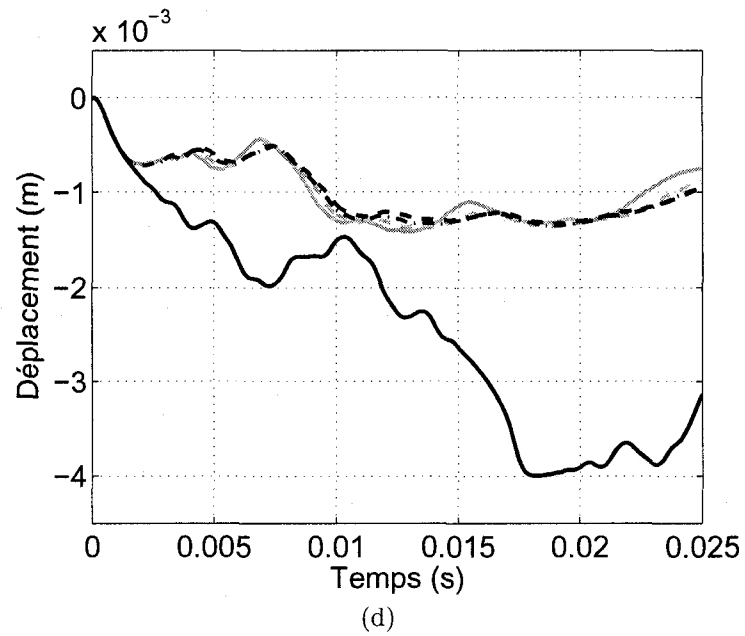
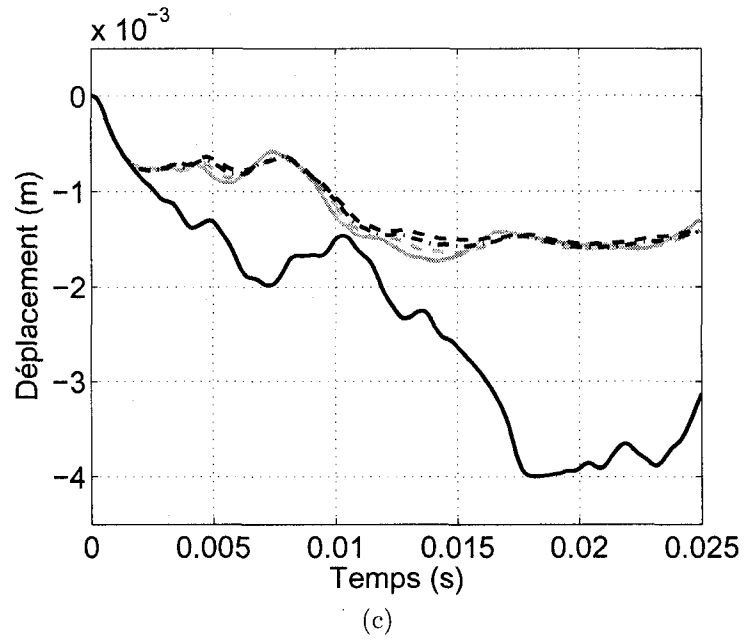


Figure 4.6 – (*suite*) Poutre nue (—). $h_v = h_b/4$ (—). $h_v = h_b/2$ (---). $h_v = 3h_b/4$ (- - -). $h_v = h_b$ (----).

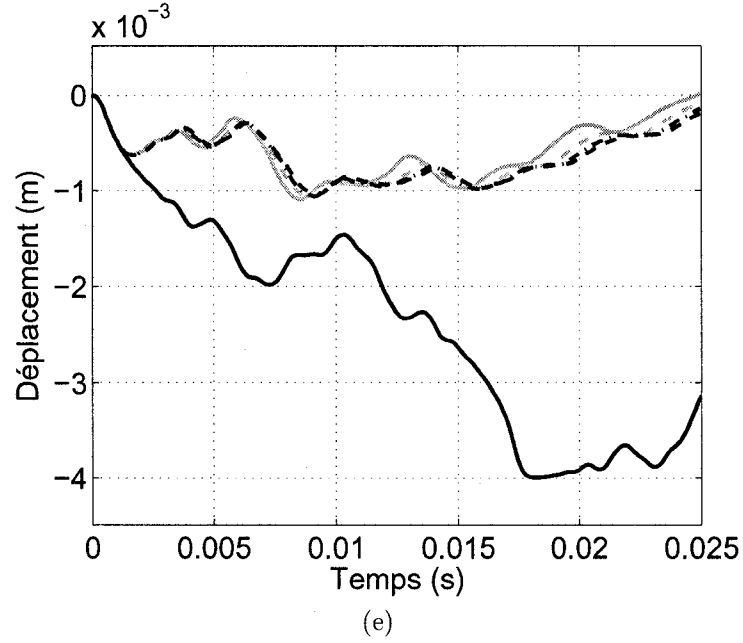


Figure 4.6 – (suite) Poutre nue (—). $h_v = h_b/4$ (-----). $h_v = h_b/2$ (- - - -). $h_v = 3h_b/4$ (— · —). $h_v = h_b$ (---).

Tableau 4.9 – Valeurs RMS (m) calculées sur 25 ms et variation maximale pour différentes valeurs d'épaisseurs h_v et h_c ($L_c = 4L/5$, $x_1 = 0$).

h_c	h_v				$(\Delta RMS)_{max}$
	$h_b/4$	$h_b/2$	$3h_b/4$	h_b	
$h_b/4$	0,00182	0,00172	0,00164	0,00157	$2,5 \cdot 10^{-4}$
$h_b/2$	0,00153	0,00149	0,00144	0,00139	$1,4 \cdot 10^{-4}$
$3h_b/4$	0,00128	0,00128	0,00125	0,00122	$6,0 \cdot 10^{-5}$
h_b	0,00104	0,00106	0,00105	0,00103	$3,0 \cdot 10^{-5}$
$3h_b/2$	0,00064	0,00068	0,00069	0,00069	$5,0 \cdot 10^{-5}$

D'abord, il est important de noter que plus h_c augmente, plus la valeur RMS diminue. Ceci est vrai pour toutes les épaisseurs de couches de viscoélastique (tableau 4.9). C'est donc dire que plus la couche de contrainte est épaisse, moins les déplacements des poutres sont grands (l'effet de rigidification est important).

On remarque toutefois qu'à mesure que h_c augmente, l'influence de la variation de h_v devient de plus en plus faible. La dernière colonne du tableau 4.9 indique l'écart maximal entre les valeurs RMS d'une même ligne. Celles-ci diminuent plus h_c augmente, sauf dans le dernier cas où il y a une légère augmentation. Cette augmentation coïncide avec le moment où l'épaisseur de la couche de contrainte dépasse celle de la poutre de base.

Même si les valeurs RMS des déplacements (en fonction de h_v) pour chaque traitement se stabilise à mesure que h_c augmente, il est possible d'observer certains points. Lorsque h_v augmente,

- Pour les couches de contrainte minces ($h_c = h_b/4$, $h_b/2$), la valeur RMS diminue légèrement en fonction de h_v .
- Pour la couche de contrainte moyenne ($h_c = 3h_b/4$), la valeur RMS ne diminue presque pas.
- Pour une couche de contrainte épaisse ($h_c = h_b$ et $h_c = 3h_b/2$), la valeur RMS est à toutes fins pratiques constante.

Ces variations peuvent être expliquées en terme de rigidité. Rappelons que la rigidité est fonction du second moment de surface I . Alors $I = I_b + I_c + md^2$. Dans le cas qui nous intéresse, d est directement lié à l'épaisseur de h_v . Ainsi, pour h_c mince, I_c est faible. Par conséquent, l'apport de md^2 est important à mesure que h_v augmente. Cependant, à partir d'une certaine épaisseur h_c , I_c devient le terme

le plus important et camouffle de plus en plus l'effet de l'augmentation de h_v .

La figure 4.6 présente essentiellement les mêmes informations que la figure 4.7, mais en faisant varier l'épaisseur de la couche de contrainte pour une épaisseur de viscoélastique donnée. Le tableau 4.9 est toujours valable.

Ces représentations permettent d'abord de commenter le temps de séparation. Les figures 4.6a à 4.6e permettent d'affirmer que pour une épaisseur fixe h_c , le temps de séparation des courbes par rapport au comportement de la poutre de base nue demeure pratiquement le même. Dans tous les cas, il est légèrement sous les 2 ms, soit juste après le contact. Pour la longueur L_c utilisée, l'épaisseur de la couche viscoélastique n'a donc pas d'influence sur le temps de séparation. Dans le cas des figures 4.7a à 4.7d, pour une valeur h_v fixe, on remarque que le temps de séparation varie légèrement en fonction de l'épaisseur de la couche de contrainte. Le cas où la couche de contrainte est la plus épaisse se dissocie le plus rapidement de la tendance alors que les couche de contraintes les plus minces quittent la trajectoire de la poutre nue plus tard. Toutefois, cette différence n'est que minime. La figure 4.7a, par exemple, présente la première séparation se produit à $t = 1,25$ ms et la dernière à $t = 1,75$ ms. Donc, en 0,5 ms, la séparation de tous les cas s'est effectuée. Le début du régime forcé des courbes est donc le même partout, mais la fin du régime forcé est légèrement modifiée en fonction de l'épaisseur h_c . Ainsi, contrairement à l'épaisseur de la couche de viscoélastique, la variation de l'épaisseur de la couche de contrainte influence *légèrement* le temps de séparation des courbes.

La figure III.3 ainsi que le tableau 4.10 présentent les informations relatives aux effets des épaisseurs de viscoélastique et de couche de contrainte constituant un

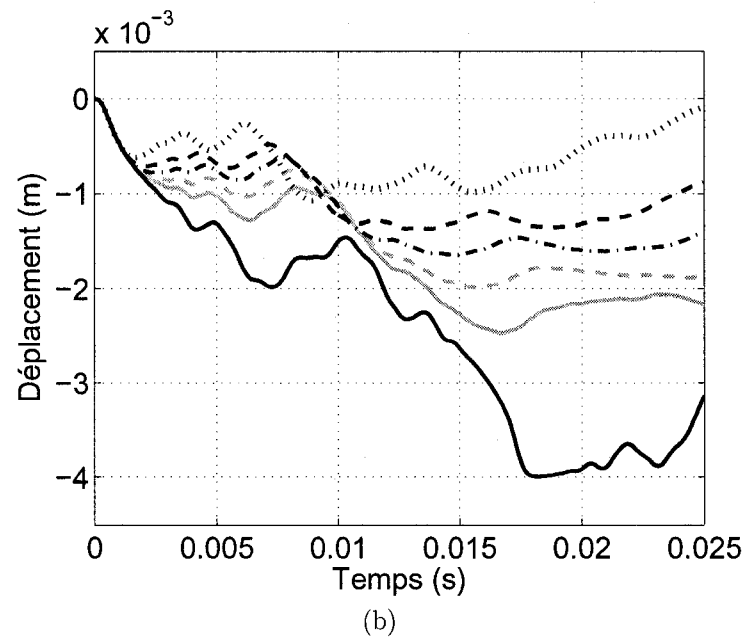
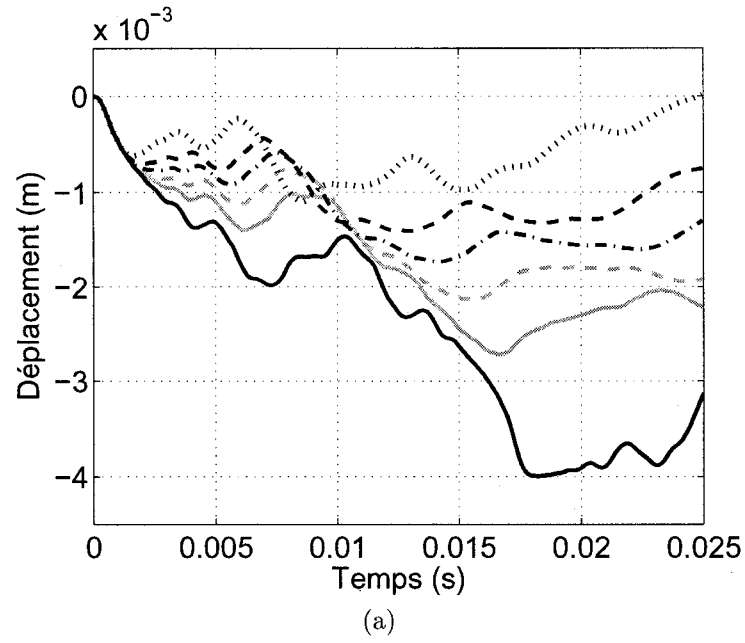


Figure 4.7 – Déplacement initial pour différentes épaisseurs de couche de contrainte. Poutre nue (—). $h_c = h_b/4$ (—). $h_c = h_b/2$ (---). $h_c = 3h_b/4$ (- - -). $h_c = h_b$ (....). $h_c = 3h_b/2$ (.....). (a) $h_v = h_b/4$. (b) $h_v = h_b/2$. (c) $h_v = 3h_b/4$. (d) $h_v = h_b$.

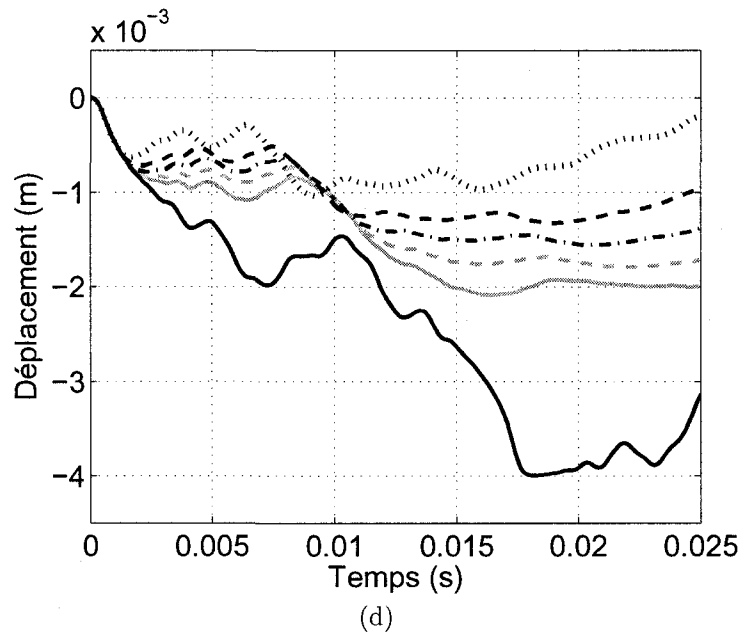
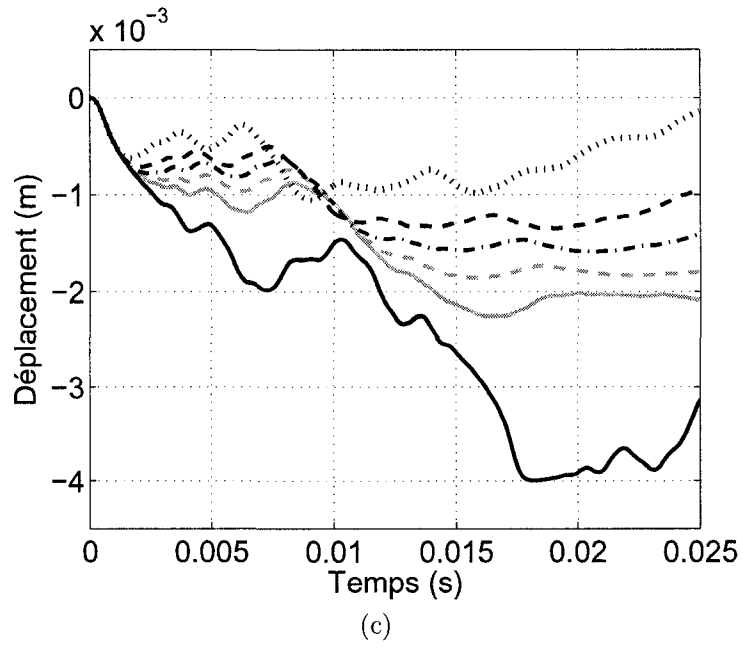


Figure 4.7 – (*suite*) Poutre nue (—). $h_c = h_b/4$ (——). $h_c = h_b/2$ (---). $h_c = 3h_b/4$ (- - -). $h_c = h_b$ (----). $h_c = 3h_b/2$ (.....).

Tableau 4.10 – Valeurs RMS (m) calculées sur 25 ms pour différentes valeurs d'épaisseurs h_v et h_c d'un tampon sans masse ($L_c = 4L/5$, $x_1 = 0$).

h_c	h_v				$(\Delta RMS)_{max}$
	$h_b/4$	$h_b/2$	$3h_b/4$	h_b	
$h_b/4$	0,00199	0,00194	0,00189	0,00183	$1.6 \cdot 10^{-4}$
$h_b/2$	0,00174	0,00174	0,00171	0,00167	$7.0 \cdot 10^{-5}$
$3h_b/4$	0,00146	0,00150	0,00150	0,00148	$4.0 \cdot 10^{-5}$
h_b	0,00118	0,00123	0,00124	0,00123	$6.0 \cdot 10^{-5}$
$3h_b/2$	0,00078	0,00081	0,00082	0,00082	$4.0 \cdot 10^{-5}$

tampon sans masse ($L_c = 4L/5$, $x_1 = 0$). Comme dans le cas du tableau 4.9, on remarque qu'une augmentation de h_c entraîne une diminution de la valeur RMS lorsque h_v est fixe. De plus, pour les tampons dont la couche de contrainte est épaisse, l'influence de la couche de viscoélastique devient de moins en moins importante. La dernière colonne du tableau 4.10 présente la différence maximale de valeurs RMS pour une même ligne. Globalement, ΔRMS_{max} diminue avec l'augmentation de h_c . Encore une fois, lorsque h_v augmente :

- Pour les couches de contrainte minces ($h_c = h_b/4$, $h_b/2$), la valeur RMS diminue.
- Pour les couches de contrainte moyenne ($h_c = 3h_b/4$) et épaisses ($h_c = h_b$ et $h_c = 3h_b/2$), la valeur RMS est à peu près constante.

Il s'agit du même comportement que celui décrit au tableau 4.9.

Le tableau 4.11 fournit les différences relatives en pourcentage entre les cas des tampons avec masse et ceux sans masse. Ces différences sont calculées de la manière suivante :

$$\frac{RMS_{sans\ masse} - RMS_{masse}}{RMS_{masse}} \cdot 100\%. \quad (4.2)$$

Selon ce tableau, les déplacements de poutres traitées avec un tampon sans masse

Tableau 4.11 – Différences relatives (%) entre les valeurs RMS pour les tampons avec et sans masse.

h_c	h_v			
	$h_b/4$	$h_b/2$	$3h_b/4$	h_b
$h_b/4$	9,3	12,5	15,2	16,9
$h_b/2$	14,0	16,9	18,9	20,5
$3h_b/4$	14,1	17,3	19,6	21,6
h_b	13,4	15,7	17,6	19,0
$3h_b/2$	20,8	18,9	19,0	19,4

sont plus grands que ceux des poutres dont les tampons ont une masse. L'effet dû à l'ajout de masse est donc bien présent. Dans le pire des cas, une différence de près de 21% est notée alors qu'au minimum, il y a 9,3% d'écart. On remarque aussi que pour des valeurs de h_c allant de $h_b/4$ à h_b , la différence de déplacements RMS augmente en fonction de l'épaisseur de la couche de viscoélastique. Cependant, pour le cas où $h_c = 3h_b/2$, la différence est relativement stable (entre 19% et 21%). Elle débute à une valeur maximale, passe par un minimum pour $h_v = h_b/2$, puis remonte.

Le phénomène est légèrement différent dans le cas où h_v est fixe et où h_c varie. Alors, la différence s'intensifie à mesure que h_c augmente de $h_b/4$ à $3h_b/2$. Par contre, pour chacune des colonnes, lorsque $h_c = h_b$, la différence diminue puis remonte pour la valeur d'épaisseur extrême.

Toutefois, à l'intérieur de la plage d'utilisation pratique habituelle des tampons ($h_v \leq h_b$, $h_c \leq 3h_b/4$), l'effet de la masse ajoutée augmente avec h_v et avec h_c .

CHAPITRE 5

DISCUSSION GÉNÉRALE

Modèle et validation

Le modèle développé à la section 3.3 s'avère être valide, tel que le prouvent les validations effectuées à la section 3.4. D'abord, en terme de fréquences naturelles, l'erreur obtenue pour la comparaison avec la littérature et avec l'expérimental prouve que le régime harmonique peut être correctement représenté. Sur le plan du régime transitoire initial, les hypothèses émises pour développer le modèle ne sont valables que pour le type d'application que nous en avons fait (i.e. structures flexibles et minces subissant des déformations élastiques linéaires).

Il est par contre important de noter que la poutre utilisée pour les expériences et les calculs numériques est une structure relativement flexible. Ainsi, les vitesses et accélérations qui en découlent ne sont pas aussi élevées qu'elles pourraient l'être sur une structure d'acier ou une structure dont les appuis sont plus rigides. Avant d'utiliser le modèle sur des structures beaucoup plus rigides, où les mouvements vibratoires seraient plus rapides, de nouvelles validations devraient être effectuées. Dans de tels cas, notamment, l'hypothèse concernant la non considération de l'inertie en rotation serait peut-être à revoir (hypothèse 2, page 39).

Lors de l'expérimentation, un signal de force a été enregistré pour chacun des essais, où $x_f=0,04$ m. Les mesures de ces signaux de force ont montré que la forme

et l'amplitude de l'impact étaient constants peu importe le traitement amortissant qui était appliqué (figure 3.8). En se basant sur ces informations, un signal de force théorique semblable aux signaux enregistrés a été modélisé (équation (3.23), figure 3.9). Cependant, lors des simulations numériques, cette même force théorique a été appliquée en bout de poutre ($x_f = L$). Or, si des mesures d'impacts avaient été menées, la forme enregistrée aurait probablement été légèrement différente de celles obtenues à la figure 3.8. Conséquemment, l'énergie fournie au système aurait été modifiée et le comportement dynamique n'aurait pas été exactement celui représenté lors des précédents calculs.

Viscoélasticité

La modélisation du matériau viscoélastique à l'aide d'une série de Prony a fourni de bons résultats. Autant les représentations du domaine temporel que celle du domaine fréquentiel se sont montrées justes. Bien que cela ait fourni des résultats cohérents, l'utilisation de deux termes seulement dans la série pourrait être une source d'erreur potentielle, spécialement si on s'intéressait à des temps supérieurs à 25 ms. Par exemple, le logiciel d'éléments finis ABAQUS utilise par défaut 13 termes dans l'expression des séries de Prony et Slanik et al. (Slanik et al., 2000) ont proposé d'en utiliser cinq. La caractérisation des propriétés viscoélastiques des matériaux demeure une difficulté.

Erreur de causalité

L'utilisation de transformées de Fourier a fourni de bons résultats dans plusieurs cas. Cependant, comme il en a été question aux sections 3.5.4 et 4.2, pour certaines configurations, notamment lorsque x_1 était supérieur ou égal à $L/5$ alors que L_c diminuait, les déplacements obtenus risquaient de ne pas respecter la causalité. Il semble à première vue que pour un tampon amortissant court positionné de plus en plus loin de l'encastrement, la couche viscoélastique ne soit pas excitée en cisaillement comme elle le devrait et agit davantage comme une masse ponctuelle. Cette avenue constitue une hypothèse plausible qui n'a toutefois pas été approfondie dans ce projet.

Résultats numériques

L'étude de l'influence des différents paramètres constituant le tampon amortissant a été débutée à la section 3.5.3 puis complétée au chapitre 4. Les paramètres étudiés sont la longueur du traitement, l'épaisseur de la couche de contrainte et l'épaisseur de la couche de viscoélastique.

Il a été démontré que plus la longueur du tampon (L_c) augmente, plus l'amplitude de déplacement diminue. De plus, lorsque L_c diminue, l'allure de la réponse ressemble à la celle d'une poutre nue. Inversement, si L_c est grand, plus le temps de séparation de la courbe est petit. En général, les mêmes observations s'appliquent lorsque la masse du tampon est retirée. Dans tous les cas, les valeurs RMS des déplacements des poutres avec tampons sont plus faibles que celles des poutres

nues.

Pour ce qui est de l'épaisseur de la couche de contrainte : plus h_c est élevé, plus les déplacements sont faibles. C'est le cas autant pour les cas où les tampons ont une masse que pour les cas sans masse.

L'épaisseur de la couche de viscoélastique influence quant à elle la réponse en déplacement lorsqu'elle est associée aux deux autres facteurs :

- L'augmentation de h_v diminue l'amplitude de vibration à mesure que la longueur du tampon augmente. Cette augmentation est davantage remarquée lorsque L_c a une grande valeur.
- L'influence du paramètre h_v est importante lorsque la couche de contrainte est mince alors que son rôle est faible lorsque h_c est élevé.

Globalement, on constate que l'ajout d'un tampon amortissant composé de viscoélastique diminue l'amplitude de vibration. Pour chacun des paramètres, l'ajout de masse a un effet allant de « pas significatif » à « légèrement significatif ». Lorsque l'effet est présent, cela se traduit par une diminution des valeurs RMS (qui demeurent en tout temps inférieures à la valeur de référence de la poutre nue).

Il est donc clair qu'il y a diminution d'amplitude même sans masse. Il est maintenant légitime de se poser la question sur l'impact de la raideur ajoutée par le tampon. Il aurait été particulièrement intéressant de faire le même exercice que pour la masse, en étudiant les effets séparés de l'ajout de rigidité en s'attardant aux modules de perte (G_l) et de restauration (G_s), et conséquemment de η . Cependant, ces propriétés ont été obtenues en respectant le principe d'équivalence temps-fréquence (section 1.2.2) à partir d'un matériau réel (via l'utilisation d'une

série de Prony). Le fait de retirer soit la partie réelle, soit la partie imaginaire de G^* aurait comme conséquence de ne plus représenter le comportement réel du viscoélastique, allant à l'encontre d'un des objectifs du travail.

Une solution qui pourrait être appliquée de manière à faire varier ces paramètres serait de « fabriquer » un essai de relaxation dans le domaine temporel qui, une fois transformé en fréquence, respecterait les critères qui seraient pré-établis (facteur de perte, modules de perte et de restauration). Enfin, dans le même ordre d'idée, il serait d'intérêt de quantifier l'erreur qui s'ensuit lorsque les propriétés des matériaux ne reflètent pas un comportement réel (par exemple des propriétés constantes).

Sur le plan des simulations, notons que les résultats numériques présentés proviennent d'une excitation et d'une mesure en bout de poutre ($x_f = x_0 = L$). La réponse a donc été observée en un point ponctuel et des conclusions ont été tirées. Le fait de n'observer qu'un seul point empêche cependant l'obtention de données concernant la propagation de l'onde de flexion dans la poutre. Comme il a été montré à la section 3.4, le modèle est en mesure de représenter adéquatement cette propagation. Des travaux subséquents devraient se pencher sur ce phénomène et étudier les effets de variation des différents paramètres sur la propagation.

CONCLUSION

Ce projet consistait à déterminer l'effet d'un traitement surfacique partiel et contraint sur la réponse transitoire initiale d'une poutre encastrée-libre soumise à un impact. D'abord, les équations du mouvement du système ont été développées en combinant la méthode de discrétisation en série *Assumed Modes* et les équations de Lagrange. De cette façon, le système continu a pu être représenté par un système discret à plusieurs degrés de liberté. Les propriétés du matériau viscoélastique ont été modélisées en utilisant une série de Prony dans le domaine fréquentiel, de sorte que son équivalent temporel était physiquement admissible. Les équations du mouvement ont été résolues dans le domaine fréquentiel fournissant du même coup les fréquences naturelles du système. Les déplacements en fréquences étaient alors convertis dans le domaine temporel en utilisant une Transformée de Fourier inverse. Les fréquences naturelles et les réponses transitoires obtenues à l'aide de la méthode ont été validées avec la littérature et avec des données expérimentales. Ces dernières ont permis de combler un manque certain de données dans la littérature concernant le régime transitoire initial. Il a été montré que l'utilisation du modèle était valable pour représenter le comportement d'une poutre encastrée-libre avec plusieurs configurations de traitement amortissant (particulièrement pour des couches viscoélastiques épaisses).

Une étude numérique visant à déterminer l'influence des différents paramètres constituant le tampon amortissant a par la suite été menée. De nombreux cas ont été traités de manière à apprécier l'effet du positionnement du traitement (x_1), de sa longueur (L_c), de l'épaisseur de la couche viscoélastique (h_v) et celle de la

couche de contrainte (h_c).

L'étude nous a permis de constater certains points :

- Le fait de déplacer le tampon vers l'extrémité libre et de diminuer sa longueur peut conduire à de graves problèmes de causalité, engendrant des résultats numériques aberrants (e.g. présence d'un déplacement *avant* l'impact).
- La longueur du traitement joue un rôle important dans le déplacement initial du système. Plus celle-ci diminue, plus la réponse se comporte comme celle d'une poutre nue. Inversement, plus elle augmente, plus le déplacement initial est faible.
- Plus l'épaisseur de la couche de contrainte augmente, plus la réponse initiale est faible.
- L'épaisseur de la couche de viscoélastique a de moins en moins d'effet à mesure que l'épaisseur de la couche de contrainte augmente.
- L'influence de l'épaisseur de la couche de viscoélastique ne présente pas de tendance particulière. Sinon que, pour un traitement long, plus l'épaisseur de la couche de viscoélastique augmente, plus les déplacements sont faibles.

L'effet de masse ajoutée par le traitement amortissant a aussi été considéré. Il s'avère que le comportement du système ne change pratiquement pas lorsque la masse du tampon est nulle. La seule différence consiste en une diminution d'amplitude des déplacements.

Ces travaux soulèvent de nouvelles questions, notamment sur le problème de causalité et sur les méthodes qui permettraient de l'éviter. Il serait aussi pertinent de quantifier l'erreur associée à des paramètres viscoélastiques qui ne seraient pas issus d'un matériau réel. De cette manière, il serait possible de considérer l'effet

de raideur ajoutée par le tampon et d'en qualifier l'influence. La propagation des ondes de flexion dans le système serait aussi un sujet pour les prochains travaux. Enfin, la généralisation du présent modèle analytique pour représenter le comportement de plaques devrait permettre une meilleure compréhension des phénomènes d'impact lors de l'assemblage de structures comme une carlingue d'avion et aider à développer des solutions pour réduire les bruits.

RÉFÉRENCES

- Ahmed, K. (1971). Dynamic analysis of sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, **21**(3), 263–276.
- ASTM (2004). Standard test method for measuring vibration-damping properties of materials. **E 756–04**, 996–1008.
- Austin, E. and Inman, D. (2000). Some pitfalls of simplified modeling for viscoelastic sandwich beams. *Transactions of the ASME*, **122**, 434–439.
- Bagley, R. and Torvik, P. (1983). Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA Journal*, **21**(5), 918–925.
- Bai, J. and Sun, C. (1993). A refined theory of flexural vibration for viscoelastically damped sandwich beams. In *Damping 1993*, California, USA, pages JBB–1–JBB–10.
- Balachandran, B. and Magrab, E. (2004). *Vibrations*. Thomson Brooks/Cole, Australia ; Canada.
- Balamurugan, V. and Narayanan, S. (2002). Finite element formulation and active vibration control study on beams using smart constrained layer damping (SCLD) treatment. *Journal of Sound and Vibration*, **249**(2), 227–250.
- Banerjee, J. (2003). Free vibration of sandiwch beams using the dynamic stiffness method. *Computers and Structures*, **81**, 1915–1922.
- Banerjee, J., Cheung, C., Morishima, R., Perera, M. and Njuguna, J. (2006). Free vibration of a three-layered sandwich beam using theory and experiment. *AIAA*, **2006–1740(3)**, 1808–1829.

- Barkanov, E. (1999). Transient response analysis of structures made from viscoelastic materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **44**(3), 393–403.
- Barkanov, E., Rikards, R., Holste, C. and Tager, O. (2000). Transient response of sandwich viscoelastic beams, plates, and shells under impulse loading. *Mechanics of Composite Materials*, **36**(3), 215–222.
- Barkanov, E. N. (1993). Natural vibrations of a system with hysteretic and viscous damping. *Mechanics of Composite Materials*, **29**(6), 613–616.
- Baruh, H. (1998). *Analytical Dynamics*. McGraw-Hill Science.
- Baz, A. and Ro, J. (1993a). Finite element modeling and performance of active constrained layer damping. In *9th Dynamics and Control of Large Structures*, Blacksburg, VA, pages 345–358.
- Baz, A. and Ro, J. (1993b). Partial treatment of flexible beams with active constrained layer damping. In *Conference of the Society of Engineering Sciences (ASME-AMD)*, Charlottesville, VA, pages 61–80. New York - ASME.
- Bhimaraddi, A. (1995). Sandwich beam theory and the analysis of constrained layer damping. *Journal of Sound and Vibration*, **179**(4), 591–602.
- Cai, C., Zheng, H., Hung, K. and Zhang, Z. (2006). Vibration analysis of a beam with an active constraining layer damping patch. *Smart Materials and Structures*, **15**, 147–156.
- Cai, C., Zheng, H. and Liu, G. R. (2004). Vibration analysis of a beam with PCLD patch. *Applied Acoustics*, **65**(11), 1057–1076.
- Casbanska-Placzekiewicz, K. (2000). Dynamic analysis of viscoelastic sandwich beams. *International Applied Mechanics*, **36**(5), 673–681.

- Chen, L. and Huang, S. (1999). Vibrations of a cylindrical shell with partially constrained layer damping (CLD) treatment. *International Journal of Mechanical Sciences*, **41**, 1485–1498.
- Chen, T. (2000). Determining a Prony series for a viscoelastic material from time varying strain data. Technical Report TM-2000-210123, NASA.
- Chen, W., Lv, C. and Bian, Z. (2003). Elasticity solution for free vibration of laminated beams. *Composite Structures*, **62**, 75–82.
- Chen, Y., Xia, Y., Ren, Z., Lu, Z. and Wang, E. (2004). An optimum analysis method of sandwich structures made from elastic–viscoelastic materials. *Journal of Wuhan University of Technology – Material Science Ed.*, **19**(2), 76–78.
- Douglas, B. and Yang, J. (1978). Transverse compressional damping in the vibratory response of elastic-viscoelastic-elastic beams. *AIAA*, **16**(9), 925–930.
- Ferry, J. (1980). *Viscoelastic properties of polymers*. Wiley, New York, 3rd edition.
- Fisher, F., Eitan, A., Andrews, R., Schadler, L. and Brinson, L. (2004). Spectral response and effective viscoelastic properties of MWNT-reinforced polycarbonate. *Advanced Composites Letters*, **13**(2), 105–111.
- Friswell, M., Inman, D. and Lam, M. (1997). On the realisation of GHM models in viscoelasticity. *Journal of Intelligent Materials Systems and Structures*, **18**, 986–993.
- Gao, J. X. and Shen, I. (1999). Dynamic characteristics of a cantilever beam with partial self-sensing active constrained layer damping treatment. *Acta Mechanica Solida Sinica*, **12**(4), 316–327.
- Hao, M. and Rao, M. D. (2005). Vibration and damping analysis of a sandwich beam containing a viscoelastic constraining layer. *Journal of Composite Materials*, **39**(18), 1621–1643. DG, 20 juin 2006.

- Hau, L. and Fung, E. (2004). Effect of ACLD treatment configuration on damping performance of a flexible beam. *Journal of Sound and Vibration*, **269**, 549–567.
- Heitkämper, W. (1985). Näherungsweise Berechnung der Schallabstrahlung von stoßartig angeregten Platten. *Acustica*, **58**(3), 141–148.
- Hu, H., Belouettar, S., Mostafa Daya, E. and Potier-Ferry, M. (2006). Evaluation of kinematic formulations for viscoelastically damped sandwich beam modeling. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **8**, 477–495.
- Huang, P., Reinhall, P. and Shen, I. (1999). A study of constrained layer damping models under clamped boundary conditions. *Adaptive Structures and Materials Systems*, **87**, 381–386.
- Huang, S., Inman, D. and Austin, E. (1996). Some design considerations for active and passive constrained layer damping treatments. *Smart Materials and Structures*, **5**, 301–313.
- Jones, D. I. G. (1974). Temperature-frequency dependence of dynamic properties of damping material. *Journal of Sound and Vibration*, **33**(4), 451–470.
- Kiehl, M. and Jerzak, C. (2001). Modeling of passive constrained layer damping as applied to a gun tube. *Shock and Vibration*, **8**, 123–129.
- Kim, T. and Kim, J. (2004). Eigensensitivity based optimal distribution of a viscoelastic damping layer for a flexible beam. *Journal of Sound and Vibration*, **273**, 201–218.
- Kung, S.-W. and Singh, R. (1998). Vibration analysis of beams with multiple constrained layer damping patches. *Journal of Sound and Vibration*, **212**(5), 781–805.

- Kung, S.-W. and Singh, R. (1999). Development of approximate methods for the analysis of patch damping design concepts. *Journal of Sound and Vibration*, **219**(5), 785–812.
- Lall, A., Asnani, N. and Nakra, B. (1988). Damping analysis of partially covered sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, **123**(2), 247–259.
- Lam, M., Inman, D. and Saunders, W. (1997). Vibration control through passive constrained layer damping and active control. *Journal of Intelligent Materials Systems and Structures*, **8**, 663–677.
- Lee, K., Xavier, P. and Chew, C. (1993). Static response of unsymmetric sandwich beams using an improved zig-zag model. *Composites Engineering*, **3**(3), 232–248.
- Lesieutre, G. and Bianchini, E. (1995). Time domain modeling of linear viscoelasticity using anelastic displacements fields. *Journal of Sound and Vibration*, **117**(4), 424–430.
- Levy, C. and Chen, Q. (1994). Vibration analysis of the partially covered double sandwich-type cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, **177**(1), 15–29.
- Lim, Y., Varadan, V. and Varadan, V. (2002). Closed loop finite-element modeling of active constrained layer damping in the time domain analysis. *Smart Materials and Structures*, **11**, 89–97.
- Marcelin, J., Trompette, P. and Smati, A. (1992). Optimal constrained layer damping with partial coverage. *Finite Element in Analysis and Design*, **12**, 273–280.
- McTavish, D. and Hughes, P. (1993). Time domain modeling of linear viscoelastic space structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, **115**(1), 103–110.
- Mead, D. and Markus, S. (1969). The forced vibration of a three-layer damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, **10**(2), 163–175.

- Miles, R. and Reinhall, P. (1986). An analytical model for the vibration of laminated beams including the effects of both shear and thickness deformation in the adhesive layer. *Transactions of the ASME – Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, **108**, 56–64.
- Moreira, R. and Dias Rodrigues, J. (2006). Partial constrained viscoelastic damping treatment of structures : a modal strain energy approach. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **6**(3), 397–411.
- Na, S., Park, J., Park, C., Kwak, M. and Shim, J. (2006). Dynamic response analysis of rotating composite–VEM thin–walled beams incorporating viscoelastic materials in the time domain. *Journal of Mechanical Science and Technology*, **20**(8), 1139–1148.
- Nashif, A., Jones, D. I. G. and Henderson, J. (1985). *Vibration Damping*. Wiley, New York. A Wiley-Interscience publication.
- Nayfeh, S. (2004). Damping of flexural vibration in the plane of lamination of elastic–viscoelastic sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, **276**, 689–711.
- Park, J. and Choi, N. (2004). Flexural vibration analysis of a sandwich beam specimen with a partially inserted viscoelastic layer. *KSME International Journal*, **18**(3), 347–356.
- Park, S. and Kim, Y. (2001). Fitting Prony-series viscoelastic models with power-law presmoothing. *Journal of Materials in Civil Engineering*, **13**(1), 26–32.
- Pritz, T. (1998). Frequency dependences of complex moduli and complex poisson’s ratio of real solid materials. *Journal of Sound and Vibration*, **214**(1), 83–104.

- Radisavljevic, V. and Baruh, H. (2001). Comparison of shortening of the projection to axial deformation. In *AIAA Structural Dynamics Conference*, Seattle, Washington.
- Raville, M., Ueng, E.-S. and M.-M., L. (1961). Natural frequencies of vibration of fixed-fixed beams. *Journal of Applied Mechanics*, pages 367–371.
- Rikards, R., Chate, A. and Barkanov, E. (1992). Finite-element analysis of damping the vibrations of laminated composites. *Mechanics of Composite Materials*, **28**(2), 147–157.
- Rikards, R. B. and Barkanov, E. N. (1992). Determination of the dynamic characteristics of vibration-absorbing coatings by the finite-element method. *Mechanics of Composite Materials*, **27**(5), 529–535.
- Rogers, L. (1984). A new algorithm for interconversion of the mechanical properties of viscoelastic materials.
- Sakiyama, T., M. H. M. C. (1996). Free vibration analysis of sandwich beam with elastic or viscoelastic core by applying the discrete green function. *Journal of Sound and Vibration*, **191**(2), 189–206.
- Sakiyama, T., Matsuda, H. and Morita, C. (1996). Free vibration analysis of continuous sandwich beams with elastic or viscoelastic cores by applying the discrete green function. *Journal of Sound and Vibration*, **198**(4), 439–454.
- Sharf, I. (1995). A survey of geometric stiffening in multibody dynamics formulations. In Scientific, W., editor, *Wave Motion, Intelligent Structures and Nonlinear Mechanics*, volume 1 of *Stability, Vibration and Control of Structures*.
- Shi, Y., Li, Z., Hua, H. and Fu, Z. (2001). The modeling and vibration control of beams with active constrained layer damping. *Journal of Sound and Vibration*, **245**(5), 785–800.

- Silverman, I. (1995). Natural frequencies of sandwich beams including shear and rotary effects. *Journal of Sound and Vibration*, **183**(3), 547–561.
- Sisemore, C. and Darvennes, C. (2002). Transverse vibration of elastic-viscoelastic-elastic sandwich beams : compression – experimental and analytical study. *Journal of Sound and Vibration*, **252**(1), 155–167.
- Sisemore, C., Smaili, A. and Darvennes, C. (1999). Experimental measurement of compressional damping in an elastic–viscoelastic–elastic sandwich beam. In *ASME – Noise Control and Acoustics Division*, pages 223–227.
- Slanik, M., Nemes, J. and Potvin, M. (2000). Time domain finite element simulations of damped multilayered beams using a Prony series representation. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, **4**, 211–230.
- Sokolinsky, V., von Bremen, H., Lavoie, J. and Nutt, S. (2004). Analytical and experimental study of free vibration response of soft-core sandwich beams. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **6**, 239–261.
- Vasques, C., Mace, B., Gardonio, P. and Dias Rodrigues, J. (2006). Arbitrary active constrained layer damping treatments on beams : Finite element modelling and experimental validation. *Computers and Structures*, **84**, 1384–1401.
- Wang, G. and Wereley, N. (2002). Spectral finite element analysis of sandwich beams with passive constrained layer damping. *Journal of Vibration and Acoustics*, **124**, 376–386.
- Yaman, M. (2005). Finite element vibration and damping analysis of a partially covered cantilever beam. *Structural Engineering and Mechanics*, **19**(2), 141–151.
- Yaman, M. (2006). Finite element vibration analysis of a partially covered cantilever beam with concentrated tip mass. *Materials and Design*, **27**, 243–250.

Zheng, H., Tan, X. M. and Cai, C. (2006). Damping analysis of beams covered with multiple PCLD patches. *International Journal of Mechanical Sciences*, **48**, 1371–1383.

ANNEXE I

REVUE DE LA LITTÉRATURE — COMPLÉMENT

Cette annexe constitue un complément à la revue bibliographique présentée au chapitre 1. On y retrouve d'abord une section sur le contrôle actif des vibrations. Il s'agit d'un volet important du domaine dont il est question dans le présent ouvrage et un simple survol n'est effectué ici. Une section traitant des critiques qu'ont reçues les hypothèses émises par Mead et Markus (Mead and Markus, 1969) a aussi été ajoutée. Finalement, une section s'attarde sur certains cas particuliers d'utilisation du traitement contraint.

I.1 Contrôle actif

Le contrôle actif des vibrations a fait l'objet de nombreuses études. En 1993, Baz et Ro (Baz and Ro, 1993b; Baz and Ro, 1993a) proposèrent une méthode hybride d'amortissement combinant le traitement passif et le traitement actif en remplaçant la couche de contrainte du traitement passif par une couche de piézoélectrique. Depuis ce temps, de nombreux auteurs ont travaillé sur la modélisation de ce type de système. Citons entre autres les travaux sur le plan analytique de Lam et al. (Lam et al., 1997), Gao et Shen (Gao and Shen, 1999) et de Cai et al. (Cai et al., 2006) et ceux de Shi et al. (Shi et al., 2001), Lim et al. (Lim et al., 2002), Balamurugan et Narayanan (Balamurugan and Narayanan, 2002), Hau et Fung (Hau and Fung, 2004) qui concernent les éléments finis.

I.2 Un mot sur les hypothèses

Les hypothèses de Mead et Markus (Mead and Markus, 1969) utilisées par plusieurs ont été remises en cause dans certaines études.

I.2.1 Linéarité du viscoélastique

L'utilisation d'un matériau élastique ou viscoélastique en guise de couche centrale d'une construction sandwich comme il était question plus haut est basée sur l'hypothèse que le viscoélastique se comporte de façon linéaire. Il existe cependant d'autres modèles qui tiennent compte du fait que le viscoélastique ne se comporte pas comme tel mais plutôt selon des modèles d'ordre supérieur. Citons par exemple les travaux de Lee, Xavier et Chew qui utilisèrent un modèle zig-zag afin de représenter le viscoélastique inséré dans une poutre sandwich (Lee et al., 1993). Ce modèle proposé tient compte d'une variation cubique des déplacements axiaux et une variation parabolique du cisaillement transversal. Plus récemment, Hu et al. ont évalué certains modèles d'ordre supérieur et des modèles zig-zag présents dans la littérature et qui font intervenir des déplacements nonlinéaires du viscoélastique (Hu et al., 2006). Chacun de ces modèles présentes différentes relations cinématiques. Des résultats analytiques et numériques sont présentés et portent sur des cas statiques et dynamiques.

Bhimaraddi s'intéressa aussi aux poutres sandwich (Bhimaraddi, 1995). Il développa un modèle basée sur l'hypothèse que les contraintes en cisaillement des matériaux varient linéairement dans la couche centrale et paraboliquement dans les

couches extérieures, de façon à ce que le cisaillement soit nul sur les deux surfaces extérieures. Le principe de Hamilton est utilisé pour déterminer les équations du mouvement. Le tout n'est modélisé qu'en utilisant trois variables associées à la couche de base. C'est ce qui en fait selon l'auteur le plus grand avantage car cela limite les coordonnées à traiter, spécialement pour les modèles par éléments finis.

I.2.2 Interface

En 1993, Bai et Sun critiquaient d'une part, le fait que l'hypothèse concernant le contact parfait entre les couches n'était pas réaliste et, d'autre part, que les modèles ne convenaient pas aux matériaux viscoélastiques beaucoup moins rigides que les couches de contraintes (Bai and Sun, 1993). Pour corriger ces situations, des discontinuités ont été introduites au niveau des fonctions de déplacements longitudinaux de l'interface. De plus, les déformations du viscoélastiques ont été considérées comme étant nonlinéaires. Les résultats présentés démontrent que le modèle proposé produit de meilleurs résultats concernant les vibrations des modes supérieurs.

I.2.3 Poutre de base et couche de contrainte

En 1995, Silverman proposa un modèle utilisant les poutres de Timoshenko en guise de couches extérieures du sandwich et inclut les effets du cisaillement (Silverman, 1995). Il prit aussi en compte l'effet de tension axiale dans la couche centrale. Aucune limitation n'a été imposée quant aux valeurs des rapports de rigidité entre les couches externes et la couche centrale, pas plus qu'en ce qui a trait au rapport des épaisseurs de ces mêmes couches (en imposant toutefois que le sandwich était

symétrique). En calculant les énergies cinétique et de déformation du système, le principe de Hamilton a été appliqué pour trouver les équations du mouvement. Pour la majorité des cas traités, il n'était pas possible de trouver la solution exacte à l'équation du mouvement. Alors, une solution approximative par la méthode de Galerkin a été utilisée. Fait intéressant, les fonctions admissibles utilisées pour solutionner par cette méthode étaient fonction du temps et de deux variables spatiales, respectivement dans le sens de l'axe et dans la direction transversale. La conclusion principale de l'étude stipule que dans le cas d'une poutre sandwich simplement supportée ou encastree-encastree, l'augmentation de l'épaisseur des couches externes ne se traduit pas obligatoirement par une augmentation des fréquences naturelles comme on serait tenté de la croire.

I.2.4 Compressibilité du viscoélastique

Certains auteurs ont émis des réticences quant à l'hypothèse concernant l'incompressibilité du matériau viscoélastique constituant la couche centrale des poutres sandwich. En effet, selon Sisemore, de nombreux articles utilisent l'hypothèse de Mead et Markus stipulant que $E_v^* \rightarrow \infty$ sans se poser la question sur son bien-fondé (Sisemore and Darvennes, 2002). Ceci signifie donc que le cisaillement serait le mécanisme prédominant de dissipation d'énergie. De plus, une telle hypothèse simplifie les relations géométriques utilisées. L'inclure implique l'ajout d'au moins un degré de liberté dans le système et complique l'analyse.

Douglas et Yang ainsi que Miles et Reinhall ont utilisé un modèle où la compression du viscoélastique est prise en compte (Douglas and Yang, 1978; Miles and Reinhall, 1986). Leur analyse autorise alors quatre mouvements : les déplacements

transversaux des deux couches externes ainsi que leur déplacement longitudinal respectifs (il est important de noter que les conditions aux limites dans ces deux cas ne sont appliquées qu'à une seule des deux couches extérieures). Dans le cas de Douglas et Yang, l'effet de la compression *uniquement* a été pris en compte (i.e. $G_v^* \rightarrow 0$). Les équations du mouvement ont été déterminées suivant la logique de Mead et Markus. Ils concluent qu'aux alentours de la fréquence de résonance en compression, qu'ils appellent « fréquence de délamination », ω_c , la compression du viscoélastique assure une dissipation importante de l'énergie. Il est important de noter que Douglas et Yang ont utilisé des propriétés viscoélastiques variables en fréquences

$$G_v^* = 1,42 \cdot 10^5 e^{0,494 \cdot \ln(\omega/2\pi)} [1 + 1,46j]. \quad (\text{I.1})$$

Quant à eux, Miles et Reinhall se sont servi du principe de Hamilton et ont solutionné les équations du mouvement par la méthode de Ritz. Critiquant le fait que les développement de Douglas et Yang ne tenaient compte que de la compression du viscoélastique, dans le cas présent, les deux modules, E_v^* et G_v^* ont été considérés. Cependant, ces propriétés ont été considérées comme étant constantes en fréquence. Selon Miles et Reinhall, lorsque le viscoélastique est très léger et si au moins une des couches extérieures est rigide en flexion, alors l'amortissement induit par la compression du viscoélastique peut devenir le mécanisme de dissipation principal.

En 2000, Austin et Inman (Austin and Inman, 2000) ont publié un article mettant en garde l'utilisation d'hypothèses trop simplistes pour modéliser le comportement vibratoire des poutres traitées par un tampon amortissant partiel. Ils présentèrent un modèle par éléments finis afin de montrer qu'il ne faut pas toujours négliger la

compression du viscoélastique et ce, spécialement lorsque la couche de contrainte du traitement amortissant est très rigide alors que la viscoélastique l'est beaucoup moins. Ils ont basé leur étude sur le calcul de l'énergie de déformation modale.

En 2002, Sisemore et Darvennes, s'appuyant sur des résultats préliminaires expérimentaux ont présenté un nouveau modèle impliquant la compression de la couche centrale viscoélastique (Sisemore et al., 1999; Sisemore and Darvennes, 2002). À l'instar de Douglas et Yang dont il était question plus haut, les conditions aux limites ne sont appliquées qu'à la couche inférieure du sandwich. Les auteurs se positionnent contre l'idée de Douglas et Yang à l'effet que la compression du viscoélastique n'a d'effet que sur une très courte plage de fréquences autour de la fréquence de délamination. Ils sont toutefois d'accord sur le fait que la compression du viscoélastique devient le mode de dissipation prédominant uniquement autour de ω_c .

Sokolinsky et al. présentèrent aussi un modèle par éléments finis où le viscoélastique était considéré comme étant peu rigide et pouvait subir les effets en compression (Sokolinsky et al., 2004). Ils appliquèrent un modèle d'ordre supérieur et les conditions limites étaient appliquées à toutes les couches. Les résultats montrèrent alors que les couches extérieures pouvaient vibrer indépendamment et présentaient des modes symétriques et antisymétriques.

Bien que la grande majorité des études menées sur les poutres sandwich concernent les vibrations transversales, quelques articles traitent des vibrations de telles structures dans le plan perpendiculaire. C'est le cas de Nayfeh qui considéra les vibrations des poutres élastique-interface-viscoélastique-interface-élastique dans le

plan xy (consistant avec la notation de la figure 1.3a) sur les plans expérimental et analytique (Nayfeh, 2004). Il conclut que les vibrations de ce système induites dans le plan xy (*plane of lamination*) peuvent être une source importante d'amortissement pour les modes inférieurs dans ce même plan. Nayfeh fait de plus une analogie entre ce cas et les vibrations transverses pour lesquelles on tient compte de la compression du matériau viscoélastique comme il a été question plus haut.

I.3 Variantes et applications

L'amortissement d'une poutre à l'aide d'un traitement partiel double a été étudié par Chen et Huang ainsi que par Levy et Chen (Chen and Huang, 1999; Levy and Chen, 1994). Tandis que la configuration inverse, où une couche partielle de viscoélastique est contrainte entre deux poutres de même longueur a été étudiée par Park et Choi (Park and Choi, 2004).

En 1999, Chen et Huang traitèrent de l'utilisation de traitement contraint pour l'amortissement de coques cylindriques en adoptant les propriétés de Douglas (Chen and Huang, 1999). Ils ont discuté de l'effet de la longueur du traitement, de l'épaisseur du viscoélastique et de la couche de contrainte.

En 2001, Kiehl et Jerzak ont présenté un bref article concernant l'application d'un traitement amortissant contraint dans le but d'amortir les vibrations d'un canon de fusil (Kiehl and Jerzak, 2001). En se servant du modèle GHM, les équations du mouvement sont établies et solutionnées en passant par un espace d'état. L'article présenté montre davantage la méthode que l'utilisation que l'on peut en faire. Notons d'ailleurs que la validation du modèle n'est pas effectuée.

En 2005, Hao et Rao présentèrent un modèle analytique d'une poutre amortie par un traitement amortissant dont la couche de contrainte, tout comme la couche centrale, sont constituées de matériaux viscoélastiques (Hao and Rao, 2005). Selon les auteurs, un tampon constitué de deux couches de viscoélastiques différents possède de meilleures propriétés amortissantes et ce, sur de plus grandes plages de températures et de fréquences. L'avantage certain d'une telle configuration réside dans le fait que le tampon est facilement malléable à la chaleur pouvant ainsi se mouler facilement à la structure devant être amortie. Ils sont notamment utilisés dans l'industrie des composants informatiques.

Yaman publia en 2006 une étude par éléments finis concernant le comportement d'une poutre encastree-libre dont l'extrémité est une masse ponctuelle et sur laquelle est installé un tampon amortissant partiel (Yaman, 2006).

ANNEXE II

MÉTHODE NUMÉRIQUE

II.1 Méthode de Nashif et généralisation

Le comportement des matériaux viscoélastiques peut être représenté par une rigidité complexe en fonction de la fréquence (sections 1.2.1, 3.3.1). Selon Nashif et al. (Nashif et al., 1985), une telle représentation implique que les équations du mouvement doivent être écrites dans le domaine fréquentiel. Par exemple, un système à un degré de liberté constitué d'une masse m et d'une rigidité complexe $k^*(\omega) = k(\omega)(1 + j\eta(\omega))$ et soumis à une impulsion Dirac sera représenté par l'équation du mouvement

$$m\ddot{x} + k^*x = F(t), \quad (\text{II.1})$$

où $F(t) = \delta(t)$. Suite à l'application d'une transformée de Fourier, on obtient le déplacement en fréquence

$$X(\omega) = \frac{1}{k(\omega)(1 + j\eta(\omega)) - m\omega^2}. \quad (\text{II.2})$$

À partir de l'équation (II.2), il est possible d'obtenir le déplacement temporel du système, en appliquant une transformée de Fourier inverse. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} d\omega}{k(\omega)(1 + j\eta(\omega)) - m\omega^2}, \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[k(\omega) - m\omega^2] \cos \omega t + k(\omega)\eta(\omega) \sin \omega t}{[-m\omega^2 + k(\omega)]^2 + k^2(\omega)\eta^2(\omega)} d\omega.
 \end{aligned} \tag{II.3}$$

Il est important de remarquer qu'il n'y a aucune partie imaginaire dans l'équation (II.3). Cela est dû au fait que, pour les raisons évoquées à la section 3.3.5, $k(\omega)$ est une fonction paire, alors que $\eta(\omega)$ est une fonction impaire¹. Ceci, combiné au fait que $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$, où \cos est une fonction paire et où \sin est une fonction impaire, implique que le résultat de l'équation (II.3) est *réel*. L'obtention d'une expression analytique comme celle représentée par l'équation (II.3) devient rapidement ardue lorsque la quantité de degrés de liberté augmente. Cependant, le principe demeure le même. Par exemple, pour un système à deux degrés de liberté constitué de deux masses identiques, de deux rigidités complexes et dont une des masses subit une impulsion Dirac (figure II.1), la même méthode peut être appliquée. Ainsi, le déplacement en fréquence de la première masse peut être exprimé en fonction des deux rigidités complexes k_1^* et k_2^* , soit :

$$X_1(\omega) = f(\underbrace{k_1, k_2}_{\text{paires}}, \underbrace{\eta_1, \eta_2}_{\text{impaires}}). \tag{II.4}$$

Suivant le développement précédent, on obtient le déplacement temporel de la

¹Ceci signifie que $k(\omega) = k(-\omega)$ et que $\eta(\omega) = -\eta(-\omega)$

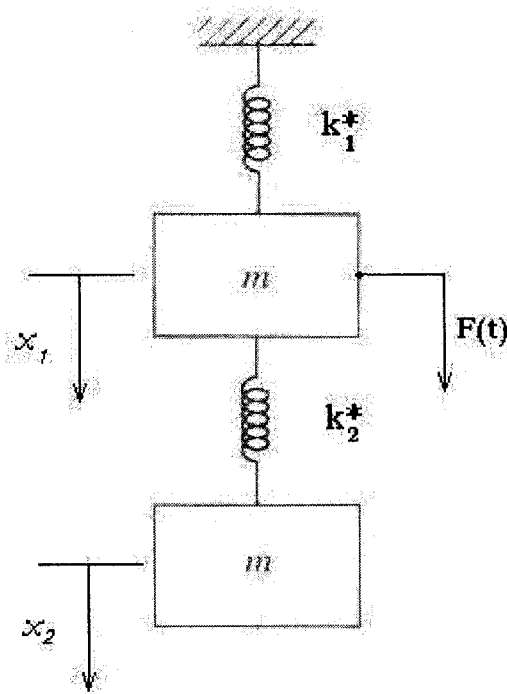


Figure II.1 – Système viscoélastique à deux degrés de liberté.

première masse en effectuant une transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega) [\cos \omega t + j \sin \omega t] d\omega, \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(\dots)}_{\text{paire}} + j \underbrace{(\dots)}_{\text{impaire}} d\omega.
 \end{aligned}
 \tag{II.5}$$

L'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ d'une fonction impaire étant nulle, le déplacement $x_1(t)$ est bel et bien réel. Le même constat est applicable pour $x_2(t)$.

Il est possible d'appliquer numériquement cette procédure à un système à plusieurs degrés de liberté.

II.2 Scripts et fonctions Matlab

Cette section fournit le code produit dans Matlab pour effectuer les calculs numériques nécessaires à l'obtention des résultats numériques. Chaque sous-section correspond à un script ou une fonction utilisés (fichier « m »).

Étant donné la complexité des expressions de fonctions de formes (spécialement pour les fonctions transversales d'une poutre encastrée-libre), notons que le module symbolique de *Matlab* a été utilisé pour certaines opérations (notamment dans la définition des fonctions de forme comme telles, annexe II.2.6).

II.2.1 Script initial de simulation

```
% -----
% Script de simulation
% -----

clear all
clc

% -----
% Repertoires:
% 1. Repertoire_Travail: repertoire ou se retrouvent tous les
% fichiers du script et le fichier de proprietes de la poutre
% etudiee.
% 2. Repertoire_Enregistrement: Repertoire ou seront
% enregistres les resultats de la simulation.

Repertoire_Travail = 'J:/.../Script'
Repertoire_Enregistrement = 'J:/.../RESULTATS/16octobre07'
% -----

% -----
% Charger les proprietes de la poutre qui sera etudiee
cd(Repertoire_Travail);
Poutre; % Inscrire le nom du script contenant les
        % propriétés du systeme
% -----

% -----
% Definitions de l'etude parametrique:
% Chaque propriete est definie dans un vecteur dont la longueur
% est stockee dans la variable Px.
% Les propriétés étudiées sont les suivantes:
%   A - Longueur du traitement
%   B - Position du traitement (debut & fin) ; fonction de la
%       longueur A et definie plus loin dans les boucles
%   C - Epaisseur du viscoelastique
%   D - Epaisseur de la couche de contrainte

L_c_liste = [0.1 0.2 0.3 0.4 0.5];      % PROPRIETE A
```

```

h_v_liste = h_b*[1/4 1/2 3/4 1 3/2];    % PROPRIETE C
h_c_liste = h_b*[1/4 1/2 3/4 1 3/2];    % PROPRIETE D

PA = length(L_c_liste);
PC = length(h_v_liste);
PD = length(h_c_liste);

for PROPRIETE_A = 1:PA
    L_c = L_c_liste(PROPRIETE_A);

    x_1_liste = 0:0.1:(L-L_c);            % PROPRIETE B
    PB = length(x_1_liste);

    for PROPRIETE_B = 1:PB
        x_1 = x_1_liste(PROPRIETE_B);
        x_2 = x_1 + L_c;

        for PROPRIETE_C = 1:PC
            h_v = h_v_liste(PROPRIETE_C);

            for PROPRIETE_D = 1:PD
                h_c = h_c_liste(PROPRIETE_D);

                % Creation du nouveau repertoire pour
                % enregistrement de la reponse:
                Id = [num2str(PROPRIETE_A) '_' ...
                    num2str(PROPRIETE_B) '_' ...
                    num2str(PROPRIETE_C) '_' ...
                    num2str(PROPRIETE_D)];
                Repertoire_Nouveau = Id;
                mkdir(Repertoire_Enregistrement, ...
                    Repertoire_Nouveau);

                tic;    % Depart chrono pour le calcul
                disp(['DEBUT ' num2str(PROPRIETE_A) ...
                    num2str(PROPRIETE_B) ...
                    num2str(PROPRIETE_C) ...
                    num2str(PROPRIETE_D)])
                disp('Calcul frequentiel')
                Modele;    % Appel du modele de
                           % resolution en frequences
                Menage_frequentiel; % Supprimer les variables

```

```

                                % inutiles pour le calcul
                                % temporel

disp('Calcul temporel');
reponse_transitoire;    % Appel du script
                        % calculant la reponse
                        % temporelle

% Enregistrement de l'information calculee
% dans le repertoire approprie
disp('Enregistrement');
cd(Rpertoire_Enregistrement); ...
cd(Rpertoire_Nouveau);
save([Id '.mat'], 'y');
cd(Rpertoire_Travail);
Menage_temporel;    % Supprimer les variables
                    % inutiles du calcul temporel

toc                                % fin du chrono

disp(['FIN ' num2str(PROPRIETE_A) ...
      num2str(PROPRIETE_B) ...
      num2str(PROPRIETE_C) num2str(PROPRIETE_D)])

end
end
end
end
end

```

II.2.2 Fichier de propriétés du système (*poutre.m*)

```
% Proprietes du montage
% A etre charge au debut du script principal

% Proprietes physiques

L = 0.5; % longueur poutre de base(m)
B = 0.0254; % largeur du systeme (m)
h_b = 0.003175; % epaisseur poutre de base (m)

% masses volumiques : base, c. contrainte, viscoelastique (kg/m3)
rho_b = 2700.0;
rho_c = 2700.0;
rho_v = 1124.0;

% Modules d'Young : base, c. contrainte (Pa)
E_b = 70e9;
E_c = 70e9;

% coeff. poisson du visco (inutile ds le calcul selon les hyp)
nu = 0.5;

% position sur la poutre ou est appliquee la force (m)
x_f = L;

% Type de montage
% CF = clamped-free
Montage = 'CF';

BConditions_CC = 0; % 0: CC libre libre;
% 1: CC a les memes conditions limites
% que la poutre de base

% Modes utilises
n_w = 20; % transversaux
n_b = 10; % longitudinaux de la poutre de base
n_c = 10; % longitudinaux de la couche de contrainte

% Amplitude de la Dirac
```

```
f_0 = 1;  
  
%Prony: Parametres de la série de Prony  
g = [0.2 0.63];  
tau = [0.007 0.070];  
G_inf = 2.4e6;
```


II.2.3 Script de calcul en fréquence (*modele.m*)

```
% - - - - -
% Proprietes de la simulation en frequences
% - - - - -

dt = 5e-5;          % pas temporel (s)
T = 25;             % temps max. de simulation (s)
t = 0:dt:T;         % vecteur de temps
Nt = length(t);
Fs = 1/dt;          % freq. max du signal
Nf = 2^nextpow2(Nt);
f = Fs/Nf * (0 : Nf/2-1); % 1/2 vecteur de frequences (hz)
omega = 2*pi*f;      % Id. (rad/s)
df = f(2) - f(1);    % pas freq. (hz)
domega = df*2*pi;    % pas freq. (rad/s)

Choix_Resol = 1 ; % 1 - Resolution traditionnelle
                % 2 - Utilisation de Cholesky

Pre_All;          % APPEL DE SCRIPT: Preallocation des espaces
                  % memoires pour la formation des matrices de
                  % masse et de rigidite ET definition des
                  % variables symboliques

force_impact;     % APPEL DE SCRIPT: Definition de la force
                  % réelle d'impact / Le résultat est une
                  % fonction dans le domaine frequentiel

% Declaration des variables utiles aux calculs
d = h_v + (h_c + h_b)/2; % voir annexe, fin chp 3.
I_b = B*h_b^3/12;        % sec. moment surface base
I_c = B*h_c^3/12;        % sec. moment surface c.contraainte

% Discretisation des limites pour l'integration numerique
Discr_int = 0.0001;      % pas
L_discr = 0:Discr_int:L; % vecteur pour integration de 0 à L
x_12 = x_1:Discr_int:x_2; % vecteur pour integration de x1 à x2

% Vecteurs de fonctions de forme en fonction de Montage
```

```

% (defini dans le fichier des proprietes de la poutre)
switch Montage
    case 'SS'                % poutre simplement supportee
        Fct_SS
    case 'CF'                % poutre encastree - libre
        Fct_CF
    case 'CC'                % poutre encastree-encastree
        Fct_CC
    case 'CS'                % poutre encastree-simpl. supp.
        Fct_CS
end

%-----
disp(' Fonctions des formes : OK');

Matrices_termes_constants;    % APPEL DE SCRIPT: Constitution
                               % des termes constants des
                               % matrices de masse et de rigidite
disp(' Matrices pour integration : OK');
disp(' Termes pour constitution des matrices : OK');

Temp_Force = subs(W, x, x_f); % effectuer l'operation symbolique
                               % en dehors de la boucle

disp(' Debut du calcul frequentiel ...');

for n = 1:length(omega)

    % -----
    % utilisation des serie prony: definition des
    % proprietes g et tau a l'interieur du fichier
    % de proprietes Poutre
    % -----

    G_0 = G_inf/(1-sum(g));
    G_v = G_0 - G_0*sum(g) + ...
          G_0*sum(i*omega(n)*g.*tau./(1+i*omega(n)*tau));
    E_v = G_v*3;    % Non utilise dans le calcul selon
                   % les selon les hypotheses emises

    % -----

```

```

C = G_v*B/h_v; % terme "g" presente en annexe de
                % l'article (voir fin chp. 3)

% Calcul des Rigidites fonction de la frequence

K_v_6 = C*Constante_K_v_6;
K_v_5 = C*Constante_K_v_5;
K_v_4 = C*Constante_K_v_4;
K_v_3 = C*Constante_K_v_3;
K_v_2 = C*Constante_K_v_2;
K_v_1 = C*Constante_K_v_1;

% Definition des matrices generalisees de Rigidite

K_b = [K_b_2 zeros(n_w, n_b) zeros(n_w, n_c); ...
       zeros(n_b, n_w) K_b_1 zeros(n_b, n_c); ...
       zeros(n_c, n_w) zeros(n_c, n_b) zeros(n_c, n_c)];

K_c = [K_c_2 zeros(n_w, n_b) zeros(n_w, n_c); ...
       zeros(n_b, n_w) zeros(n_b, n_b) zeros(n_b, n_c); ...
       zeros(n_c, n_w) zeros(n_c, n_b) K_c_1];

K_v = [K_v_6 -(K_v_5).' K_v_4.']; ...
       -K_v_5 K_v_3 -(K_v_2).'; ...
       K_v_4 -K_v_2 K_v_1];

K = K_b + K_c + K_v;

% definition de la force qui est fonction de la frequence
F = [F_impact(n) * Temp_Force; ...
     zeros(n_b, 1); ...
     zeros(n_c, 1)];

% resolution du systeme
Z = (K - (omega(n)^2)*M)\F; % Z est un vecteur qui contient
% les déplacements :
                                % 1. Transversaux (les n_w premiers
                                % pts)
                                % 2. Long. de la base (les n_b pts
                                % suivants)
                                % 3. Long. de la CC (les n_c
                                % derniers pts)

```

```

Z_Matrx(n,:) = Z(1:n_w, 1).'; % Enregistrement des déplacements
% transversaux uniquement

if isequal(mod(n, 50000), 0) % indicateur de progression
    disp([num2str(n) ' / ' num2str(Nf/2)]);
end
end

% construction du spectre complet à partir de l'information
% connue / le spectre est prêt à être utilisé numériquement
% (ie : construit pour le domaine fréquentiel positif uniquement)
% Y est une matrice
Y = [Z_Matrx; conj(flipud(Z_Matrx(2:end, :)))];

clear Z Z_Matrx f omega F F_impact; % variables inutiles

```

II.2.4 Script de préallocation de la mémoire (*Pre_All.m*)

```
% Definitions des variables symboliques
syms x W U_b U_c;

% Preallocation des memoires pour les matrices de masses et
% de rigidite et pour la matrice de reponse frequentielle

% Matrices de masse - structure

% M_I = [M_b_1+M_c_1+M_v_1 zeros(n_w, n_b) zeros(n_w, n_c); ...
%        zeros(n_b, n_w) zeros(n_b, n_b) zeros(n_b, n_c); ...
%        zeros(n_c, n_w) zeros(n_c, n_b) zeros(n_c, n_c)];

M_b_1 = zeros(n_w, n_w);
M_c_1 = zeros(n_w, n_w);
M_v_1 = zeros(n_w, n_w);

% Matrices de rigidite - structure

% K_I = [K_b_2+K_c_2+K_v_6 -(K_v_5).' K_v_4.']; ...
%        -K_v_5 K_b_1+K_v_3 -(K_v_2).'; ...
%        K_v_4 -K_v_2 K_c_1+K_v_1];

K_b_1 = zeros(n_b, n_b);
K_b_2 = zeros(n_w, n_w);

K_c_1 = zeros(n_c, n_c);
K_c_2 = zeros(n_w, n_w);

Constante_K_v_1 = zeros(n_c, n_c);
Constante_K_v_2 = zeros(n_c, n_b);
Constante_K_v_3 = zeros(n_b, n_b);
Constante_K_v_4 = zeros(n_c, n_w);
Constante_K_v_5 = zeros(n_b, n_w);
Constante_K_v_6 = zeros(n_w, n_w);

K_v_1 = zeros(n_c, n_c);
```

```
K_v_2 = zeros(n_c, n_b);  
K_v_3 = zeros(n_b, n_b);  
K_v_4 = zeros(n_c, n_w);  
K_v_5 = zeros(n_b, n_w);  
K_v_6 = zeros(n_w, n_w);  
  
Z_Matrx = zeros(Nf/2, n_w);  
% -----
```

II.2.5 Script de définition de la force (*force_impact.m*)

```
% -----
% Force d'impact modelisee a partir de l'equation 2 de Ross&Ostiguy,
% JSV 301 2007 28-42, tirée de la référence 6 du même article.
% -----

% Paramètres de l'équation (nos paramètres pour obtenir quelque chose
% qui ressemble à l'expérimental)
    Fmax = 25;
    tau = 1e-3;
    Lambda = 1.0;
    t_contact = 0:dt:3e-3;

    T_force = pi * t_contact / tau;      % temps adimensionnel pour
                                         % le calcul de la force ou
                                         % t correspond au temps de
                                         % contact

% force dans le domaine temporel [application de l'équation (2)]
    f_impact = -(real(Fmax * ((1.1/(1+Lambda+2*Lambda^2)) .* ...
        (sin(0.97*T_force)).^1.5 .* exp(-(0.4*T_force).^4) + ...
        ((1+2/Lambda)/(1+Lambda)) * ...
        (T_force./(T_force+1/Lambda)).^1.5 .* ...
        exp(-T_force/Lambda))));

% force dans le domaine frequentiel: represente le spectre complet
% defini uniquement dans le domaine frequentiel positif. ie: deja
% mis en forme pour le calcul numérique
    F_impact = fft(f_impact, Nf)*dt;
    clear T_force;
```

II.2.6 Script de définition des fonctions de formes d'une poutre encastrée-libre

(Fct_CF.m)

```

% Fonctions de formes transverses - Encastrée-Libre
% x est une variable symbolique et conséquemment,
% W, U_b et U_c le sont aussi.

for k = 1:n_w
    beta = (k-0.5)*pi/L;
    gamma = (sinh(beta*L)-sin(beta*L))/(cosh(beta*L)+cos(beta*L));

    if k == 1
        W(1,1) = cosh(1.875*x/L)-cos(1.875*x/L)-(sinh(1.875)- ...
            sin(1.875))/(cosh(1.875)+cos(1.875))* ...
            (sinh(1.875*x/L)-sin(1.875*x/L));

    elseif k == 2

        W(2,1) = cosh(4.6941*x/L)-cos(4.6941*x/L)-(sinh(4.6941)- ...
            sin(4.6941))/(cosh(4.6941)+cos(4.6941))* ...
            (sinh(4.6941*x/L)-sin(4.6941*x/L));

    else
        W(k,1) = cosh(beta*x)-cos(beta*x)- ...
            gamma*(sinh(beta*x)-sin(beta*x));
    end
end

for k = 1:n_b
    U_b(k,1) = sin((2*k-1)*pi*x/(2*L));
end

if isequal(BConditions_CC, 0)
    for k = 1:n_c
        U_c(k,1) = cos((k-1)*pi*(x)/L_c);
    end
else
    for k = 1:n_c
        U_c(k,1) = sin((2*k-1)*pi*x/(2*L_c));
    end
end

```



```
end
end

W_x = diff(W, 'x');           % derivee de W par rapport a x
W_xx = diff(W, 'x', 2);       % derivee seconde de W par rapport a x
U_b_x = diff(U_b, 'x');       % derivcee de U_b par rapport a x
U_c_x = diff(U_c, 'x');       % derivcee de U_c par rapport a x
```

II.2.7 Script de définition des termes non fonction de la fréquence (*Matrices_termes_constants.m*)

```
% Definition des termes non fonction de la frequence

% Definition des tenseurs utiles a l'integration
WW = W*W.';
WWx = W_x*W_x.';
WWxx = W_xx*W_xx.';

UcUc = U_c*U_c.';
UbUb = U_b*U_b.';
UcUb = U_c*U_b.';

UcUcx = U_c_x*U_c_x.';
UcxUbx = U_c_x*U_b_x.';
UbUbx = U_b_x*U_b_x.';

UcW_x = U_c * W_x.';
UbW_x = U_b * W_x.';

UcxWxx = U_c_x * W_xx.';
UbxWxx = U_b_x * W_xx.';

% Termes constants des matrices de masse et de rigidite

for a = 1:n_w
    for b = 1:n_w
        M_b_1(a,b) = rho_b*h_b*B*integrale(WW(a,b), L_discr, x);
        M_c_1(a,b) = rho_c*h_c*B*integrale(WW(a,b), x_12, x);
        M_v_1(a,b) = rho_v*h_v*B*integrale(WW(a,b), x_12, x);

        K_b_2(a,b) = E_b*I_b*integrale(WWxx(a,b), L_discr, x);
        K_c_2(a,b) = E_c*I_c*integrale(WWxx(a,b), x_12, x);

        Constante_K_v_6(a,b) = (d^2)*integrale(WWx(a,b), x_12, x);
    end

    for b = 1:n_b
```

```

        Constante_K_v_5(b,a) = d*integrale(UbW_x(b,a), x_12, x);
    end

    for b = 1:n_c
        Constante_K_v_4(b,a) = d*integrale(UcW_x(b,a), x_12, x);
    end
end
%-----
for a = 1:n_b
    for b = 1:n_b
        M_b_2(a,b) = rho_b*h_b*B*integrale(UbUb(a,b), L_discr, x);
        K_b_1(a,b) = E_b*h_b*B*integrale(UbUbx(a,b), L_discr, x);
        Constante_K_v_3(a,b) = integrale(UbUb(a,b), x_12, x);
    end

    for b = 1:n_c
        Constante_K_v_2(b,a) = integrale(UcUb(b,a), x_12, x);
    end

end

for a = 1:n_c
    for b = 1:n_c
        M_c_2(a,b) = rho_c*h_c*B*integrale(UcUc(a,b), x_12, x);
        K_c_1(a,b) = E_c*h_c*B*integrale(UcUcx(a,b), x_12, x);
        Constante_K_v_1(a,b) = integrale(UcUc(a,b), x_12, x);
    end
end

% % Matrice de masse
% M_I - Matrice de base, cf Cai et Al

M_b = [M_b_1 zeros(n_w, n_b) zeros(n_w, n_c); ...
        zeros(n_b, n_w) zeros(n_b, n_b) zeros(n_b, n_c); ...
        zeros(n_c, n_w) zeros(n_c, n_b) zeros(n_c, n_c)];

M_c = [M_c_1 zeros(n_w, n_b) zeros(n_w, n_c); ...
        zeros(n_b, n_w) zeros(n_b, n_b) zeros(n_b, n_c); ...
        zeros(n_c, n_w) zeros(n_c, n_b) zeros(n_c, n_c)];

M_v = [M_v_1 zeros(n_w, n_b) zeros(n_w, n_c); ...
        zeros(n_b, n_w) zeros(n_b, n_b) zeros(n_b, n_c); ...

```

```
zeros(n_c, n_w) zeros(n_c, n_b) zeros(n_c, n_c)];
```

```
M = M_b + M_c + M_v;
```

II.2.8 Fonction d'intégration d'expressions symboliques (*integrale.m*)

```

function Integration = integrale(Integrande, Domaine_discret, z)
%
% Par D.Granger - 2007
% Calcule a l'aide la commande trapz l'integrale d'une expression
% symbolique, "Integrande", composee d'une variable symbolique, "z",
% sur le domaine discretise "Domaine_discret".
% La fonction retourne une valeur numerique.

% Verifie si l'integrande contient ou non la variable symbolique "z"
% findsym retourne '' s'il n'y a pas de variable symbolique dans
% "Integrande"
Contient_Variable = findsym(Integrande);

% Procede a l'integration: deux cas possibles
% 1. integration d'une constante (aucune variable symbolique dans
%    l'expression
% 2. integration de l'expression

if isequal(Contient_Variable, '')
    Integration = double(Integrande)*(Domaine_discret(end)-Domaine_discret(1));
else

f_fun = vectorize(char(Integrande));
f_fun = @(x)eval(f_fun);
Temp = f_fun(Domaine_discret);

Integration = trapz(Domaine_discret, Temp);
end

```

II.2.9 Script de libération de la mémoire I (*menage__frequentiel.m*)

% Destruction des variables utilisees dans le calcul frequentiel et
% inutiles pour le calcul temporel.

```
clear L_discr
clear M

clear domaine_frequentiel

clear -regexp ^Constante
clear -regexp ^K
clear -regexp ^M_
clear -regexp ^U
clear -regexp ^WW
clear -regexp ^W_
```

II.2.10 Script de libération de la mémoire II (*menage__temporel.m*)

% Destruction des variables utilisees dans le calcul temporel et
% inutiles pour le calcul frequentiel.

```
clear freq2time
clear forcing
clear Vect_Fct_Frm
clear reponse_dirac
clear Conv_brute
clear reponse_convolvee
```

II.2.11 Script de calcul de la réponse transitoire (*reponse_transitoire.m*)

```
% Calcul de la reponse transitoire
x_0 = 0:0.005:L;          % discretisation de la longueur de la poutre
Nx_0 = length(x_0);

y_temp = ifft(Y)*Fs ;     % obtention de la reponse temporelle
                           % a partir de la reponse frequentielle
clear Y;                  % variable inutile

y_temp = y_temp(1:Nt, :); % selection des points utiles
y = zeros(Nt, Nx_0);

% definition d'une matrice contenant les fct de formes
% transversales du systeme pour n_w modes etudies
% Evaluation des expressions symboliques avec la
% discretisation x_0
Matrx_Fct_Frm = zeros(n_w, length(x_0));
for b = 1:n_w
    f_fun = vectorize(char(W(b)));
    f_fun = @(x)eval(f_fun);
    Matrx_Fct_Frm(b,:) = f_fun(x_0);
end

% Ponderation avec les fct de formes pour chq
% position x de la poutre: ce qui fournit la
% reponse transitoire a chq point
for c = 1:Nx_0
    y(:,c) = y_temp*Matrx_Fct_Frm(:,c);
end

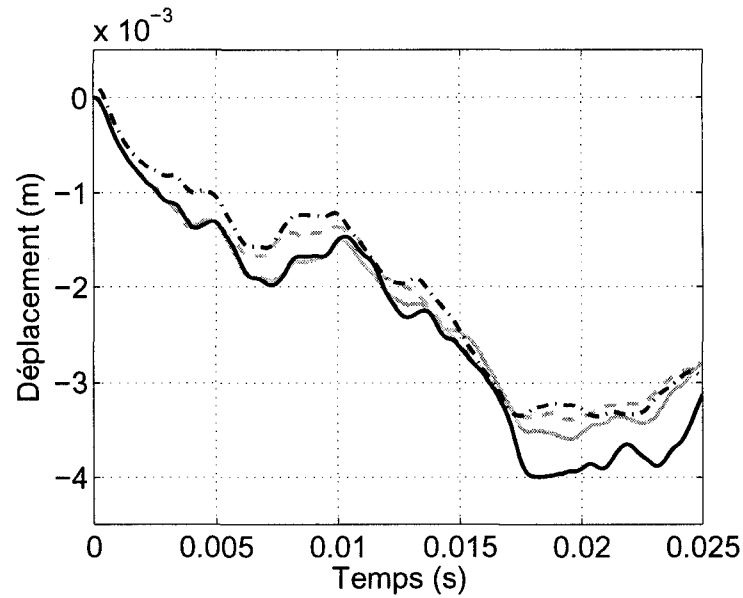
y = y(1:10001, :); % on ne conserve que les 10000 premiers
                  % points constituant une periode de pour
                  % eviter d'enregistrer un signal de
                  % 25 s inutilement

clear Matrx_Fct_Frm y_temp; % variables inutiles
```

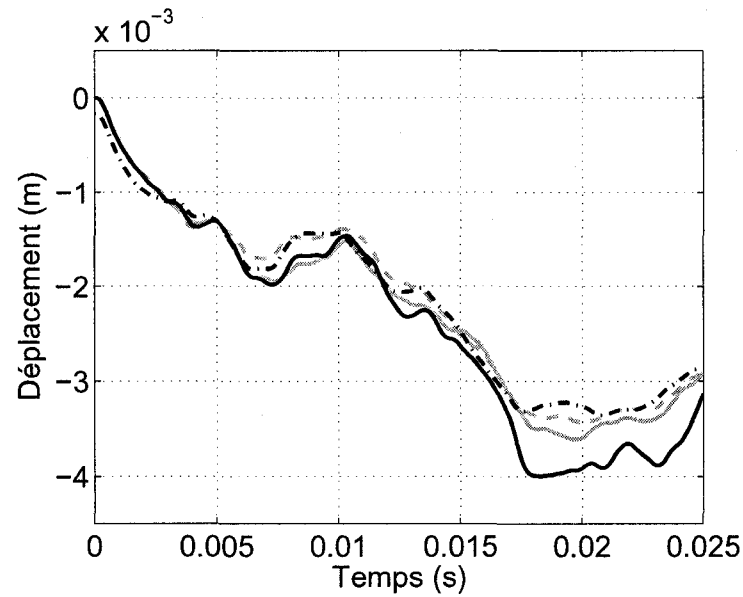
ANNEXE III

FIGURES

Les figures supplémentaires mentionnées dans le texte sont présentées dans cette annexe.



(a)



(b)

Figure III.1 – Effet de la position x_1 pour un tampon d'une longueur $L_c = 2L/5$ dont la couche de contrainte possède une épaisseur $h_c = h_b/4$ sur la réponse initiale transitoire. Poutre nue (—). $x_1 = 0$ (— — —). $x_1 = L/5$ (---). $x_1 = 2L/5$ (- . -).
 (a) $h_v = h_b/4$ (b) $h_v = h_b/2$ (c) $h_v = h_b$.

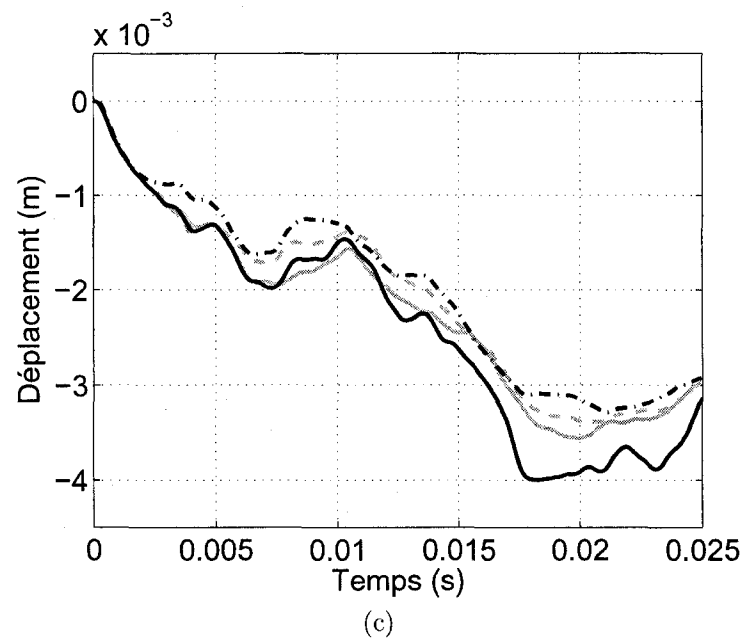


Figure III.1 – (suite) Poutre nue (—). $x_1 = 0$ (---). $x_1 = L/5$ (---). $x_1 = 2L/5$ (- - -).

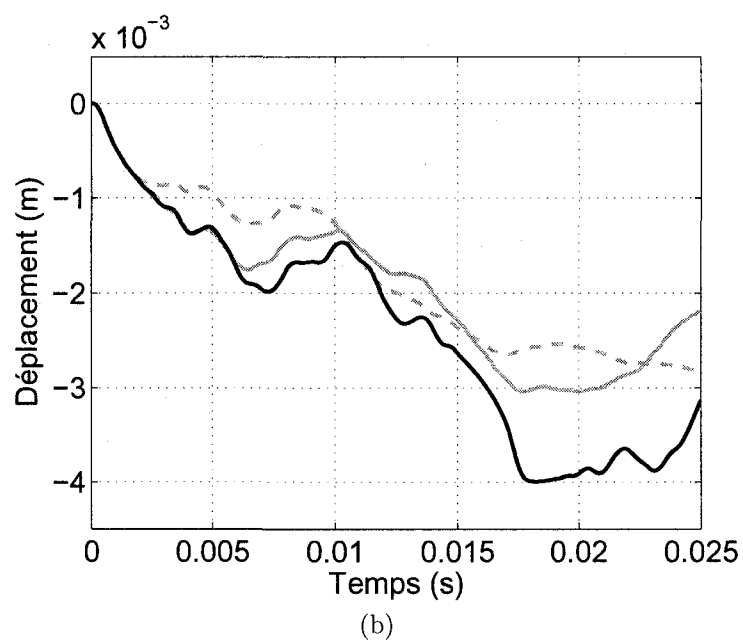
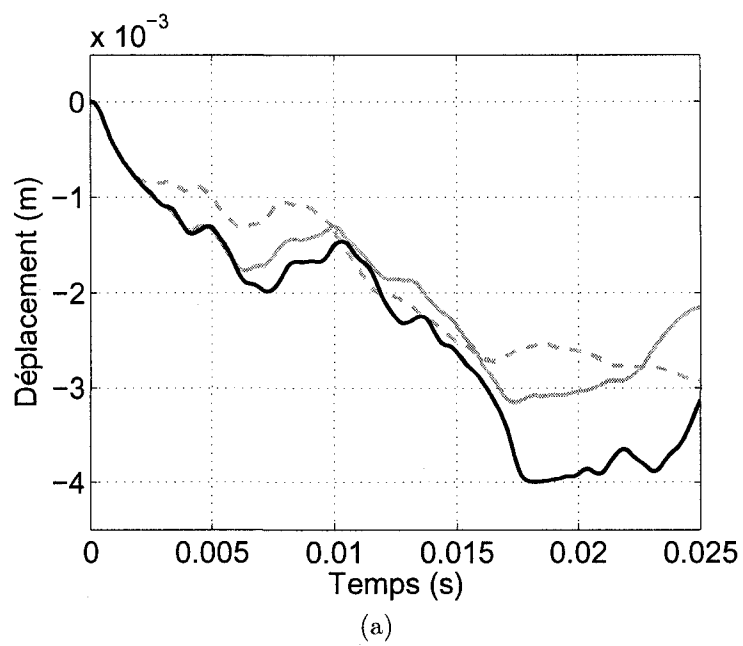


Figure III.2 – Effet de la position x_1 pour un tampon d'une longueur $L_c = 3L/5$ dont la couche de contrainte possède une épaisseur $h_c = h_b/4$ sur la réponse initiale transitoire. Poutre nue (—). $x_1 = 0$ (---). $x_1 = L/5$ (-.-.). (a) $h_v = h_b/4$ (b) $h_v = h_b/2$ (c) $h_v = h_b$.

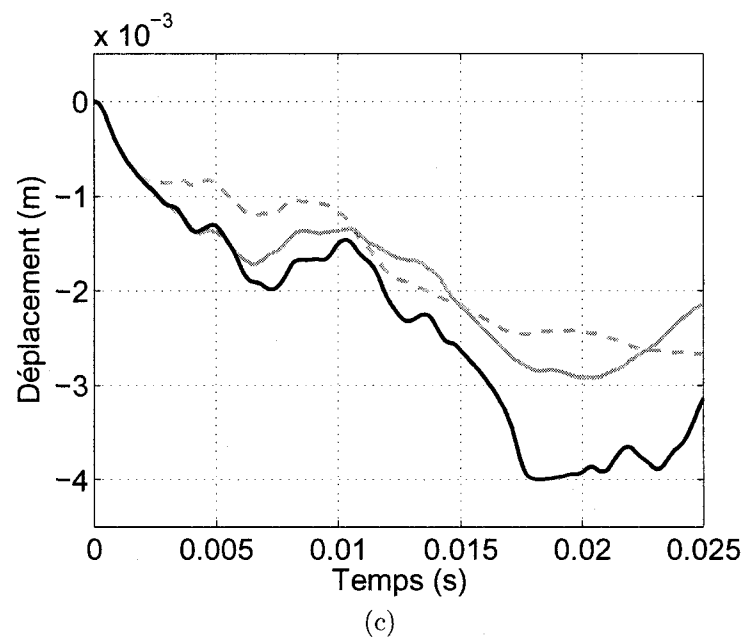
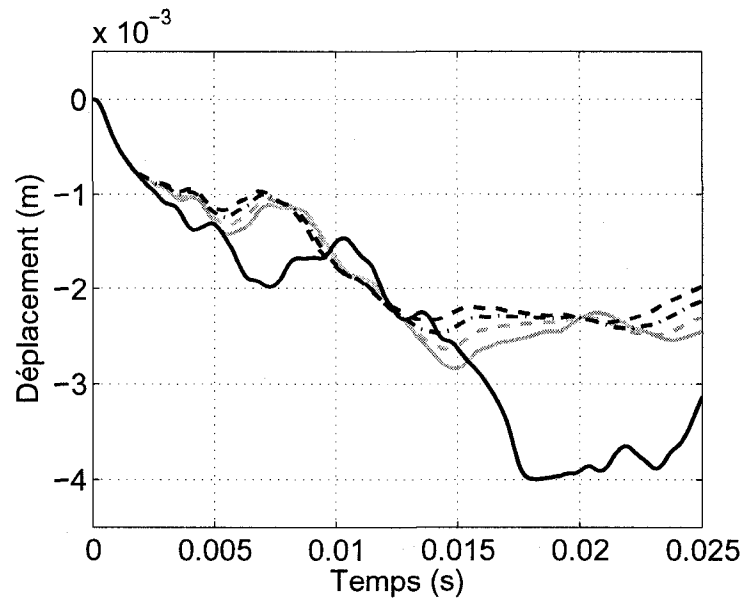
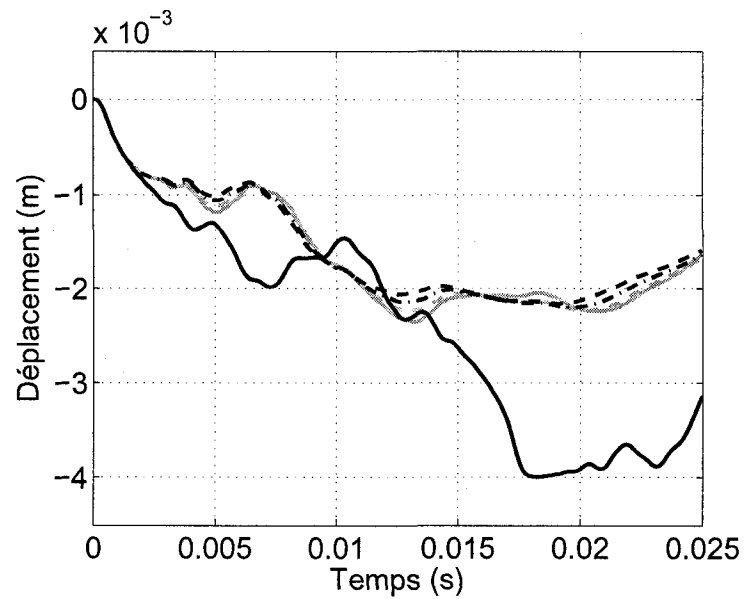


Figure III.2 – (*suite*) Poutre nue (—). $x_1 = 0$ (—). $x_1 = L/5$ (---).



(a)



(b)

Figure III.3 – Déplacement initial pour différentes épaisseurs de viscoélastique d'un tampon sans masse. Poutre nue (—). $h_v = h_b/4$ (—). $h_v = h_b/2$ (---). $h_v = 3h_b/4$ (-.-). $h_v = h_b$ (----). (a) $h_c = h_b/4$. (b) $h_c = h_b/2$. (c) $h_c = 3h_b/4$. (d) $h_c = h_b$. (e) $h_c = 3h_b/2$.

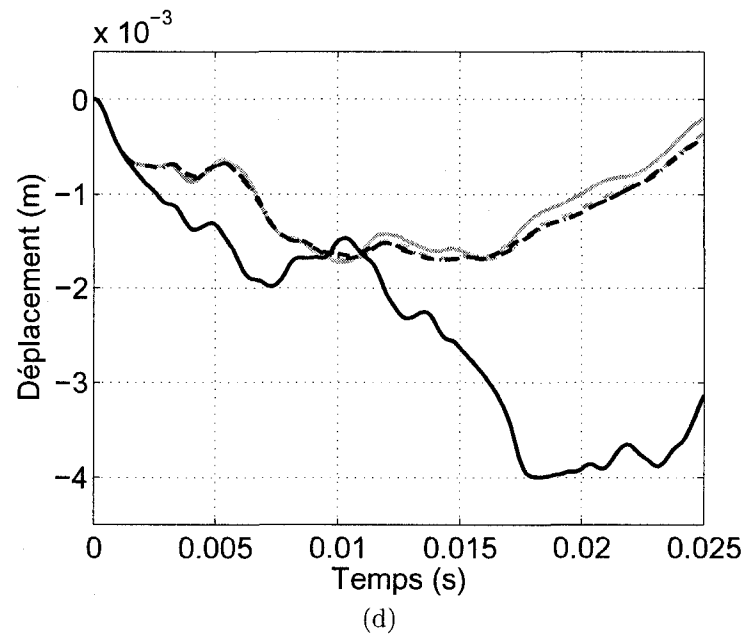
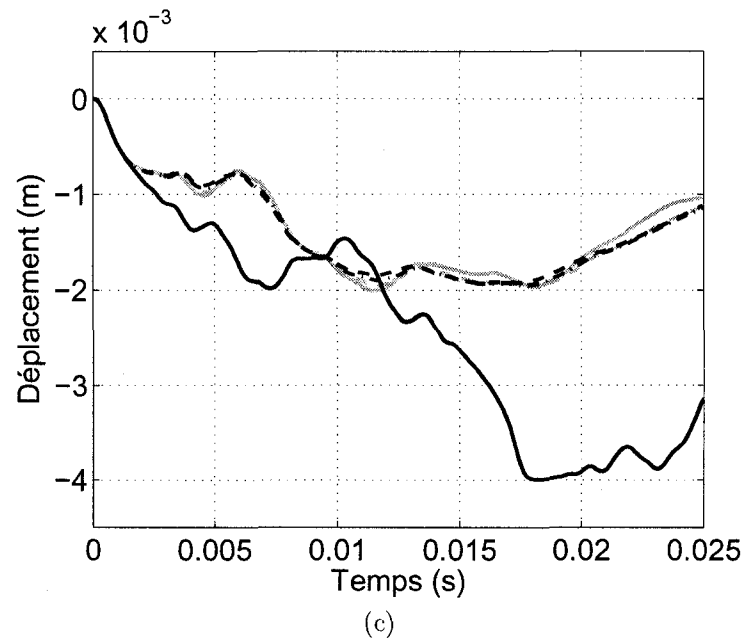


Figure III.3 – (*suite*) Poutre nue (—). $h_v = h_b/4$ (.....). $h_v = h_b/2$ (---). $h_v = 3h_b/4$ (- - -). $h_v = h_b$ (---).

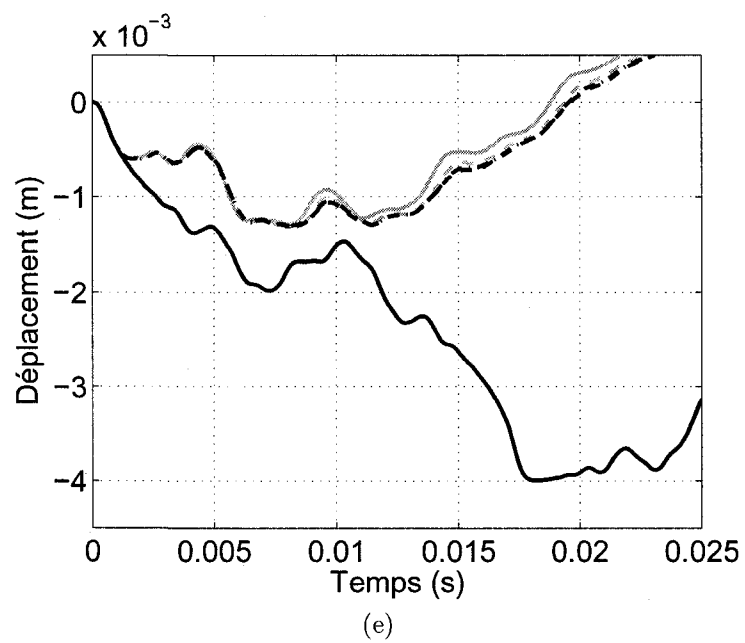


Figure III.3 – (*suite*) Poutre nue (—). $h_v = h_b/4$ (— — —). $h_v = h_b/2$ (— · —). $h_v = 3h_b/4$ (- - -). $h_v = h_b$ (· · ·).